UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE
CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO
DE

MATEMÁTICA

BELO HORIZONTE — BRASIL

UM TEOREMA DE PONTO DE SELA DE M. SCHECHTER E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS RESSONANTES

Leopoldo Grajeda Fernandes

Orientador: João Carlos Nascimento de Pádua

DEZEMBRO - 1994

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

UM TEOREMA DE PONTO DE SELA DE M. SCHECHTER E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS RESSONANTES

Leopoldo Grajeda Fernandes

Orientador: João Carlos Nascimento de Pádua

DEZEMBRO - 1994

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UM TEOREMA DE PONTO DE SELA DE M. SCHECHTER E APLICAÇÕES A PROBLEMAS ELÍPTICOS RESSONANTES

por

LEOPOLDO GRAJEDA FERNANDES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 12 de dezembro de 1994.

Banca Examinadora:

Liliane de Almeida Maia

PROFa. LILIANE ALMEIDA MAIA

Paulo Cesar

PROF. PAULO CÉSAR CARRIÃO

JCarlos Pádua

PROF. JOÃO CARLOS NASCIMENTO DE PÁDUA
(ORIENTADOR)

Índice

Introdução

Neste trabalho demonstraremos um teorema recente do tipo ponto de sela e daremos duas aplicações a problemas de valores de contorno elípticos ressonantes.

Vamos estudar o problema de valores de contorno

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_l u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com bordo suave $\partial\Omega$, f é uma função de Carathéodory definida em $\Omega \times I\!R$ e λ_l denota o l-ésimo autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Diz-se que o problema (0.1) é ressonante no infinito quando

$$\liminf_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t} \leq 0 \leq \limsup_{|t|\to\infty} \frac{f(x,t)}{t}.$$

Trataremos o problema (0.1) utilizando o método variacional. A aplicação do método variacional ao problema (0.1) consiste em definir um funcional J do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ em $I\!R$ cujos pontos críticos correspondem a soluções fracas de (0.1) para, em seguida, demonstrar a existência de um ponto crítico de J.

O trabalho pioneiro no estudo de problemas de valores de contorno ressonantes foi realizado por Landesman e Lazer [13]. Estes autores forneceram condições suficientes para a existência de soluções para o problema (0.1) no caso em que f é contínua e possui limites (finitos) quando $t \to \pm\infty$. Desde então, desenvolveu-se um considerável trabalho de pesquisa sobre problemas de valores de contorno ressonantes, visando fornecer condições suficientes para a existência de soluções de tais problemas.

Dentre os vários resultados obtidos nessa área, destaca-se o trabalho de Ahmad, Lazer e Paul [3]. Nesse artigo, compreendeu-se pela primeira vez a importância do comportamento da primitiva

$$F(x,t) \stackrel{def}{=} \int_0^t f(x,s)\, ds$$

no caso ressonante, abordando-se o caso em que $|F(x,t)| \to \infty$ quando $|t| \to \infty$ e f é apenas limitada.

Posteriormente, como foi observado em [16], p.25, esse trabalho motivou Rabinowitz a desenvolver o seu Teorema de Ponto de Sela [15]. Este teorema é de grande utilidade para se encontrar pontos críticos de funcionais de espaços de Banach reais em $I\!R$ e vem sendo amplamente usado. Para posterior comparação, enunciamos o

0.1 - TEOREMA DO PONTO DE SELA DE RABINOWITZ. *Seja $X = N \oplus M$, onde X é um espaço de Banach real e $0 < \dim N < \infty$. Seja $J \in C^1(X, I\!R)$, suponhamos que exista uma vizinhança limitada V de 0 em N tal que*

$$\sup_{v \in \partial V} J(v) = m_0 < m = \inf_{w \in M} J(w)$$

Seja

$$c = \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{v \in \overline{V}} J(\phi(v)),$$

onde $\Gamma = \{\phi \in C(\overline{V}, X) : \phi(v) = v,\ \forall v \in \partial V\}$, e suponhamos que J satisfaça $(\mathrm{PS})_c$. Então, J possui valor crítico $c \geq m$.

Lembramos que um funcional $J \in C^1(X, I\!R)$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, $(\mathrm{PS})_c$, se toda seqüência $\{u_k\} \subset X$ tal que $J(u_k) \to c$ e $J'(u_k) \to 0$ possui uma subseqüência convergente.

Entretanto, devido às dificuldades de se verificar a condição $(\mathrm{PS})_c$, foi necessário introduzir condições mais facilmente verificáveis. A condição de Cerami no nível c, $(\mathrm{C})_c$, tem sido bastante utilizada (e.g. [6], [4] e [8]). Dizemos que um funcional $J \in C^1(X, I\!R)$ satisfaz $(\mathrm{C})_c$ se:

(i) toda seqüência limitada $\{u_k\} \subset X$ tal que $J(u_k) \to c$ e $J'(u_k) \to 0$ possui uma subseqüência convergente;

(ii) $\|J'(u)\|\ \|u\| \geq \alpha$ para todo $u \in J^{-1}([c-\sigma, c+\sigma])$ com $\|u\| \geq R$, para algumas constantes $\sigma, R, \alpha > 0$.

No artigo de Bartolo, Benci e Fortunato [4], a condição de Cerami, em lugar de $(\mathrm{PS})_c$, é utilizada em resultados do tipo ponto de sela para espaços de Hilbert reais, similares ao Teorema do Ponto de Sela de Rabinowitz. Visando aplicações em que H é uma soma de subespaços de dimensão infinita, eles utilizaram a noção de "entrelaçamento" (*link*), para demonstrar o seguinte teorema:

0.2 - TEOREMA. *Seja H um espaço de Hilbert real. Suponhamos que $J \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaça a condição $(\mathrm{C})_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e que existam um conjunto fechado $S \subset H$ e uma variedade de Hilbert $Q \subset H$ com bordo ∂Q tais que:*

(a) $\sup_{u \in \partial Q} J(u) = m_0 < m = \inf_{u \in S} J(u)$;

(b) *S e ∂Q estão "entrelaçados";*

(c) $\sup_{u \in Q} J < \infty$.

Então, J possui um valor crítico $c \geq m$.

Nos últimos anos, Schechter tem demonstrado formas alternativas do teorema do passo da montanha. Nesta linha, Schechter vem publicando vários trabalhos, dentre os quais ressaltamos [17], [18], [19] e [20]. Neste último, Schechter demonstrou uma variação dos resultados acima permitindo aplicações mesmo quando $m \leq m_0$, o que será essencial nos Capítulos 2 e 3. Enunciamos a seguir este resultado:

0.3 - TEOREMA DO PONTO DE SELA DE SCHECHTER. *Seja H um espaço de Hilbert com uma decomposição ortogonal em subespaços fechados $H = N \oplus M$ onde $0 < \dim N < \infty$. Seja $J \in C^1(H, \mathbb{R})$. Suponhamos que $m = \inf_M J > -\infty$ e que exista $R > 0$ tal que:*

(A) $\sup_{\|v\|=R} J(v) = m_0 < m_2 = \inf_{\|w\| \geq R} J(w)$;

(B) *existem $0 < \tau < 1$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\langle J'(u), u \rangle \leq \tau \, \|u\| \, \|J'(u)\|$$

para todo u com $\|u\| = R$ e $J(u) \leq m_0 + \epsilon_0$.

Então, existem uma constante $c \geq m$ e uma seqüência $\{u_k\} \subset H$ tais que, quando $k \to \infty$:

$$J(u_k) \longrightarrow c \quad e \quad (1 + \|u_k\|)\|J'(u_k)\| \longrightarrow 0.$$

Gostaríamos ainda de mencionar um outro teorema de ponto de sela, obtido por Silva [21], onde é permitido que $m \leq m_0$ mas supondo $(\mathrm{PS})_c$ no intervalo $[m, m_1]$ com $m_1 = \sup_N J$.

No Capítulo 1 demonstraremos o Teorema do Ponto de Sela de Schechter como enunciado em [20]. Um importante passo na demonstração desse teorema é a construção de um campo pseudo-gradiente [17], que será detalhada no Apêndice A. Esse teorema é bastante apropriado ao estudo de problemas onde

$$f(x,t) \to 0 \quad \text{e} \quad F(x,t) \text{ é limitada quando } |t| \to \infty,$$

os quais são conhecidos como fortemente ressonantes ([4], [17]).

No Capítulo 2, apresentaremos uma aplicação do resultado obtido por Schechter a uma classe de problemas elípticos fortemente ressonantes [20]. Nesse capítulo, demonstraremos a existência de uma solução fraca para o problema (0.1) quando $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory tal que:

(a) $|f(x,t)| \leq a|t|^{\gamma} + b(x)$ sendo $0 \leq \gamma < 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $b(x) \in L^2(\Omega)$.

(b) Existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tal que $b_0 \leq \int_\Omega F(x, v(x))\, dx, \quad \forall v \in N = \oplus_{j\leq l} \mathcal{N}_j$ onde $\mathcal{N}_j = \mathcal{N}(-\Delta - \lambda_j)$;

(c) $H(x,t) \leq W_2(x) \in L^1(\Omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}$ onde $H(x,t) = 2F(x,t) - tf(x,t)$;

(d) $\limsup_{|t|\to\infty} H(x,t) \leq W_1(x) \in L^1(\Omega)$;

(e) $b_1 = \int_\Omega W_1(x)\, dx < 2b_0$.

Uma vez que o resultado obtido nessa aplicação tem pouco em comum com os resultados anteriores (como os de [4] e [17], por exemplo), Schechter acredita ser necessário ainda trabalhar muito até que se obtenham resultados ótimos para o caso fortemente ressonante ([20], p.4).

Neste trabalho, abordaremos ainda o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{0.2}$$

análogo ao problema (0.1), mas com

$$\lambda_l \leq L(x) \stackrel{def}{=} \liminf_{|t|\to\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} \leq K(x) \stackrel{def}{=} \limsup_{|t|\to\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} \leq \lambda_{l+1}. \tag{0.3}$$

Neste caso, o problema (0.2) é conhecido como duplamente ressonante. Os pioneiros no tratamento de tais problemas foram Berestycki e de Figueiredo [5], porém utilizando a teoria do grau de Leray-Schauder. Recentemente, esse problema foi tratado em Costa e Oliveira [7], Costa e Magalhães [8], em Omari e Zanolin [14] e em Gonçalves, de Pádua e Carrião [11].

No Capítulo 3, aplicaremos novamente o Teorema do Ponto de Sela de Schechter, dessa vez ao estudo de problemas elípticos com ressonância dupla [11]. Estudaremos o problema (0.2) quando f é uma função de Carathéodory em $\Omega \times I\!R$ cuja primitiva satisfaz (0.3) e tal que:

(1) $|f(x,t)| \leq a|t|^\sigma + b$ onde $a, b \in I\!R^+$ e $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $1 \leq \sigma < \infty$, para $N = 1, 2$.

(2) (a) $H(x,t) \to -\infty$, quando $|t| \to \infty$, q.t.p. $x \in \Omega$;
(b) $H(x,t) \leq M(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ para algum $M \in L^1(\Omega)$;

(3) Para cada $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$2F(x,t) \geq (\lambda_l - \epsilon)t^2 - A_\epsilon(x), \ \forall t \in I\!R, \text{ q.t.p. } x \in \Omega;$$

(4) $\int_{v<0} [L(x) - \lambda_l]v^2 + \int_{v>0} [K(x) - \lambda_l]v^2 > 0, \ \forall v \in \mathcal{N}_l, v \neq 0.$

Sob estas condições, como veremos no Capítulo 3, o problema (0.2) possui pelo menos uma solução fraca.

Um exemplo de problema em que a dupla ressonância ocorre efetivamente é dado por:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_{l+1}u^+ - \lambda_l u^- + h(u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.4}$$

onde $l \geq 2$ e $h(t) = \sqrt{|t|}$, se $t \leq -1$, e $h(t) = -\sqrt{t}$, se $t \geq 1$, $h(t)$ contínua em $I\!R$. É fácil ver que nesse exemplo $L(x) \equiv \lambda_l$ e $K(x) \equiv \lambda_{l+1}$, sendo L e K definidos em (0.3). Assim, verificam-se todas a condições acima e, como veremos no Capítulo 3, o problema (0.4) possui uma solução fraca (essa solução será não trivial se escolhermos $h(0) \neq 0$).

Esse exemplo mostra que o resultado acima melhora o correspondente resultado de Costa e Magalhães ([8], Th.2), o qual exige $L(x) > \lambda_l$ em um conjunto de medida positiva em lugar da condição (4) acima.

Finalmente, no Apêndice B mostraremos que as soluções fracas obtidas nas aplicações acima são, de fato, soluções clássicas desde que f seja localmente lipschitziana e satisfaça a condição de crescimento (1) acima.

Capítulo 1

Um Teorema de Ponto de Sela

No teorema abaixo, Ψ denota o conjunto de todas as funções positivas não-crescentes ψ definidas em $[0,\infty)$ tais que

$$\int_1^\infty \psi(t)\,dt = \infty \tag{1.1}$$

e B_R denota a bola de centro em zero e raio R, com bordo ∂B_R.

1.1 - TEOREMA DO PONTO DE SELA DE SCHECHTER. *Seja $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço de Hilbert com uma decomposição ortogonal em subespaços fechados $H = N \oplus M$ onde $0 < \dim N < \infty$. Seja J um funcional continuamente diferenciável em H. Suponhamos que exista $R > 0$ tal que:*

I. (a) $J(v) \leq m_0,\quad v \in \partial B_R \cap N$;

(b) $J(v) \leq m_1,\quad v \in B_R \cap N$;

II. (a) $J(w) \geq m_2 > m_0,\quad w \in \hat{B}_R \cap M$, *onde* $\hat{B}_R = \{u \in H : \|u\| \geq R\}$;

(b) $m = \inf_M J > -\infty$;

III. *existem $0 < \tau < 1$ e $\epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\langle J'(u), u\rangle \leq \tau\, \|u\|\, \|J'(u)\| \tag{1.2}$$

para todo $u \in \partial B_R$ com $J(u) \leq m_0 + \epsilon_0$.

Então, para cada $\psi \in \Psi$ existem uma constante $c \in [m, m_1]$ e uma seqüência $\{u_k\} \subset H$ tais que, quando $k \to \infty$:

$$J(u_k) \longrightarrow c \quad e \quad \frac{J'(u_k)}{\psi(\|u_k\|)} \longrightarrow 0. \tag{1.3}$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que o teorema seja falso. Mostraremos então que:

(i) existem $\epsilon > 0$ e $\phi_0 : \partial B_R \cap N \longrightarrow H$ contínua tais que:

$$J(\phi_0(v)) < m - \epsilon, \quad \forall v \in \partial B_R \cap N \tag{1.4}$$

(ii) $\phi(B_R \cap N) \cap M \neq \emptyset$, para toda $\phi \in C(B_R \cap N, H)$ tal que $\phi|_{\partial B_R \cap N} = \phi_0$.

Estas duas condições mostram que M e $\partial B_R \cap N$ estão "entrelaçados" (Rabinowitz [16], p.31).

Consideremos, inicialmente, o caso em que $m \leq m_0$. Afirmamos que existem $\psi \in \Psi$ e $\epsilon > 0$ tais que:

$$\psi(\|u\|) \leq \|J'(u)\| \tag{1.5}$$

para todo $u \in \tilde{Q} = \{u \in H : m - 3\epsilon \leq J(u) \leq m_1 + 3\epsilon\}$.

É conveniente observarmos que $m \leq J(0) \leq m_1$, pois $0 \in M$ e $0 \in B_R \cap N$. Para provar a afirmativa, fixemos $\psi \in \Psi$. Dado $n \in I\!N$, seja $\psi_n = \frac{1}{n}\,\psi$. Se nossa afirmativa for falsa, como $\psi_n \in \Psi$, existe u_n tal que

$$\psi_n(\|u_n\|) > \|J'(u_n)\|$$

com $J(u_n) \in [m - \frac{3}{n}, m_1 + \frac{3}{n}]$. Assim, existe uma subseqüência $\{u_{n_i}\}$ tal que

$$J(u_{n_i}) \longrightarrow c \in [m, m_1]$$

e

$$\|J'(u_{n_i})\| < \frac{1}{n_i}\psi(\|u_{n_i}\|)$$

ou seja,

$$\frac{J'(u_{n_i})}{\psi(\|u_{n_i}\|)} \longrightarrow 0$$

o que contradiz o fato de o teorema ser falso. Isto prova nossa afirmativa. Em particular, como $m_0 \leq m_1$, (1.5) vale para todo u em $Q_0 = \{u \in H : m - 3\epsilon \leq J(u) \leq m_0 + 3\epsilon\}$ e, portanto,

$$Q_0 \subset \hat{H} = \{u \in H : J'(u) \neq 0\}$$

pois $\|J'(u)\| \geq \psi(\|u\|) > 0$ em Q_0. Podemos ainda tomar $3\epsilon < \epsilon_0$ de modo a obter, por (1.2), que

$$\langle J'(u), u\rangle \leq \tau\,\|u\|\,\|J'(u)\| \quad \text{em } Q_0 \cap \partial B_R. \tag{1.6}$$

Fixamos $0 < \alpha < 1-\tau$. Necessitamos, agora, de um campo $Y : \hat{H} \longrightarrow H$ localmente lipschitziano tal que

$$\|Y(u)\| \leq 1 \;\text{ e }\; \langle J'(u), Y(u)\rangle \geq \alpha\,\|J'(u)\|, \quad \forall u \in \hat{H} \tag{1.7}$$

e ainda

$$\langle Y(u), u\rangle < 0, \quad \forall u \in Q_0 \cap \partial B_R. \tag{1.8}$$

Para obtermos tal Y, podemos aplicar, devido a (1.6), o Lema A.2 com $F = Q_0 \cap \partial B_R$. Definimos:

$$\begin{aligned} Q &= \{u \in Q_0 : m - 2\epsilon \leq J(u) \leq m_0 + 2\epsilon\}, \\ Q_1 &= \{u \in Q : m - \epsilon \leq J(u) \leq m_0 + \epsilon\}, \\ \eta(u) &= \frac{d(u, H\backslash Q)}{d(u, Q_1) + d(u, H\backslash Q)}. \end{aligned}$$

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sigma'(t) = -W(\sigma(t)) \\ \sigma(0) = v \end{cases} \tag{1.9}$$

para $v \in \partial B_R \cap N$, onde

$$W(u) \stackrel{def}{=} \eta(u)\, Y(u),$$

sendo Y estendido a todo o espaço H fazendo $Y = 0$ em $H\backslash\hat{H}$.

Afirmamos que a aplicação W é localmente lipschitziana em H. Com efeito, como J' é contínua, $\hat{H}$ é aberto. Assim, dado $u \in \hat{H}$, existe uma vizinhança V de u em $\hat{H}$, onde Y é lipschitziano. Como η é contínua e limitada e $W = \eta\, Y$, W é lipschitziana em V. Uma vez que $\eta(u) \equiv 0$ fora de Q e $Q \subset \hat{H}$ é fechado, temos que $W(u) \equiv 0$ no conjunto aberto $H\backslash Q$; assim, W é lipschitziana fora de $\hat{H}$. Logo, W é localmente lipschitziana em H.

Portanto, o problema de valor inicial acima possui solução única $\sigma(t, v)$ para t em um intervalo maximal $(t^-(v), t^+(v))$. Afirmamos que $\sigma(t, v)$ está definida para todo $t \in I\!R$. De fato, se, digamos, $t^+(v) < \infty$, consideremos uma seqüência $\{t_n\} \subset (t^-(v), t^+(v))$ com $t_n \to t^+(v)$. De (1.7) temos que $\|W(u)\| \leq 1, \forall u \in H$, e, conseqüentemente, integrando (1.9),

$$\|\sigma(t_m, v) - \sigma(t_n, v)\| \leq |t_m - t_n|.$$

Mas, assim, $\{\sigma(t_n, v)\} \subset H$ é uma seqüência de Cauchy e, portanto, converge para algum $\bar{v} \in H$ quando $t_n \to t^+(v)$. Então, $\sigma(t, \bar{v})$ fornece uma continuação de $\sigma(t, v)$, o que contradiz a maximalidade de $t^+(v)$. Assim $t^+(v) = \infty$. Analogamente, $t^-(v) = -\infty$.

Vamos mostrar que $\sigma(t, v)$ não intercepta M para todo $t \geq 0$. Observamos que, por (1.8), para todo ponto em ∂B_R, existe uma vizinhançana qual $\eta(u)\ \langle u, Y(u)\rangle \leq 0$. Desta forma, se $\sigma(t, v) \in \partial B_R$, temos que

$$\frac{d\|\sigma(t, v)\|^2}{dt} = 2\ \langle\sigma, \sigma'\rangle = -2\ \eta(\sigma)\ \langle\sigma, Y(\sigma)\rangle \geq 0.$$

Assim, $\sigma(t,v)$ nunca entra em B_R. Além disso, como, por (1.9) e (1.7),

$$\frac{d[J(\sigma(t))]}{dt} = \langle J'(\sigma), \sigma' \rangle = -\eta(\sigma)\ \langle J'(\sigma), Y(\sigma)\rangle \leq -\alpha\ \eta(\sigma)\ \|J'(\sigma)\| \leq 0 \tag{1.10}$$

temos que; se $t_2 > t_1$,

$$J(\sigma(t_2, v)) \leq J(\sigma(t_1, v)) \leq m_0.$$

Logo, em vista da hipótese IIa, temos que $\sigma(t,v)$ não intercepta $M \cap \hat{B}_R$. Portanto, $\sigma(t,v)$ nunca intercepta M quando $t \geq 0$.

Para definirmos ϕ_0 satisfazendo as condições (i) e (ii), seja T tal que

$$\alpha \int_R^{R+T} \psi(t)\ dt > \epsilon + m_0 - m.$$

Notemos que tal T existe devido a (1.1). Definimos $\phi_0 : \partial B_R \cap N \longrightarrow H$ por

$$\phi_0(v) = \sigma(T, v). \tag{1.11}$$

Assim, ϕ_0 é contínua (pois soluções do problema de valor inicial (1.9) dependem continuamente das condições iniciais). Se existe $0 \leq t_1 < T$ tal que $\sigma(t_1, v) \notin Q_1$, então, uma vez que $J(\sigma(t_1, v)) \leq J(\sigma(0, v)) \leq m_0$, temos

$$J(\sigma(T,v)) \leq J(\sigma(t_1, v)) < m - \epsilon.$$

Se não existe t_1 como acima, então $\sigma(t,v) \in Q_1$ para $0 \leq t \leq T$. Integrando (1.9) e notando que, por (1.7), $\|W(u)\| \leq 1$, $\forall u \in H$, temos

$$\|\sigma(t,v) - v\| \leq |t|.$$

Logo, por (1.5) e (1.10),

$$\begin{aligned} J(\sigma(T,v)) - J(v) &\leq -\alpha \int_0^T \|J'(\sigma(t,v))\|\ dt \\ &\leq -\alpha \int_0^T \psi(\|\sigma(t,v)\|)\ dt \ \leq\ -\alpha \int_0^T \psi(\|v\| + t)\ dt \\ &= -\alpha \int_0^T \psi(R+t)\ dt \ =\ -\alpha \int_R^{R+T} \psi(\tau)\ d\tau < -\epsilon - m_0 + m. \end{aligned}$$

Portanto, em vista a hipótese Ia, para todo $v \in \partial B_R \cap N$,

$$J(\phi_0(v)) = J(\sigma(T,v)) < m - \epsilon$$

e fica demonstrada a condição (i).

Para demonstrar (ii), utilizaremos algumas propriedades do grau de Brouwer (e.g. Rabinowitz [16], Smoller [22]). Seja ϕ uma aplicação contínua de $B_R \cap N$ em H tal que

$$\phi(v) \equiv \phi_0(v) \text{ em } \partial B_R \cap N.$$

Seja P a projeção ortogonal de H sobre N. Consideremos a solução $\tilde{\sigma}(t, v)$ do problema de valor inicial (1.9) porém com $v \in B_R \cap N$. Notemos que

$$\tilde{\sigma}(T, v) \equiv \phi_0(v) \text{ em } \partial B_R \cap N.$$

Uma vez que $\sigma(t, v)$ não intercepta M para $t \geq 0$, $P\tilde{\sigma}(t, v) = P\sigma(t, v) \neq 0$ para $v \in \partial B_R \cap N$ e $0 \leq t \leq T$. Dessa forma, o grau de Brouwer $d(P\tilde{\sigma}(t, v), B_R \cap N, 0)$ está definido para todo $0 \leq t \leq T$. Além disso, $P\tilde{\sigma}$ é uma homotopia e, como $\tilde{\sigma}(0, v) \equiv v$, temos que

$$d(P\tilde{\sigma}(T, v), B_R \cap N, 0) = d(id, B_R \cap N, 0) = 1.$$

Por outro lado, visto que $\phi(v)$ e $\tilde{\sigma}(T, v)$ coincidem em $\partial B_R \cap N$, temos

$$d(P\phi(v), B_R \cap N, 0) = d(P\tilde{\sigma}(T, v), B_R \cap N, 0) = 1.$$

Deste modo, existe $v_0 \in B_R \cap N$ tal que $P\phi(v_0) = 0$, ou seja, $\phi(v_0) \in M$. Portanto, temos que

$$\phi(B_R \cap N) \cap M \neq \emptyset$$

e a condição (ii) está demonstrada.

Para o caso $m_0 < m$, basta tomar $\phi_0(v) = v$ em $\partial B_R \cap N$ e $\epsilon < m - m_0$. Neste caso, a condição (i) segue imediatamente da hipótese I. Para a condição (ii), observamos que a nova ϕ_0 corresponde a fazer $T = 0$ em (1.11) e aplicamos exatamente o mesmo argumento acima.

Seja S o conjunto de todas as aplicações contínuas $\phi : B_R \cap N \longrightarrow H$ tais que $\phi|_{\partial B_R \cap N} = \phi_0$ e seja

$$c \overset{def}{=} \inf_{\phi \in S} \max_{v \in B_R \cap N} J(\phi(v)). \tag{1.12}$$

Decorre da hipótese IIb e da condição (ii) que $c \geq m$. Por outro lado, temos que $c \leq m_1$. De fato, sendo $\tilde{\sigma}(t, v)$ como acima, temos que $\tilde{\sigma}(T, v) \in S$. Além disso, devido a (1.10) temos que

$$J(\tilde{\sigma}(T, v)) \leq J(v) \leq m_1, \quad \forall v \in B_R \cap N$$

de forma que, por (1.12), temos

$$c \leq \max_{v \in B_R \cap N} J(\tilde{\sigma}(T, v)) \leq m_1.$$

Assim, $c \in [m, m_1]$.

Em seguida, vamos apresentar uma $\phi_1 \in S$ que contraria a definição (1.12) de c. Seja

$$Q_0' = \{u \in H : |J(u) - c| \leq 3\delta\} \subset \tilde{Q}$$

onde $0 < \delta \leq \epsilon/2$. Notemos que, devido a (1.5), temos $Q_0' \subset \hat{H}$. Definimos:

$$\begin{aligned} Q' &= \{u \in Q_0' : |J(u) - c| \leq 2\delta\} \\ Q_1' &= \{u \in Q' : |J(u) - c| \leq \delta\} \\ \eta_1(u) &= \frac{d(u, H\backslash Q')}{d(u, Q_1') + d(u, H\backslash Q')}. \end{aligned}$$

Seja $Y(u)$ uma aplicação localmente lipschitziana de $\hat{H}$ em H satisfazendo (1.7). Para obter tal campo, podemos, por exemplo, aplicar o Lema A.2 com $F = \emptyset$, pois neste caso, a hipótese (A.2) é válida por vacuidade. Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \sigma'(t) &= -W(\sigma(t)) \\ \sigma(0) &= u, \quad u \in H \end{cases} \tag{1.13}$$

onde

$$W(u) \stackrel{def}{=} \eta_1(u)\, Y(u),$$

com Y estendido a todo o espaço H tomando $Y = 0$ em $H\backslash\hat{H}$.

Um argumento análogo ao que segue (1.9) demonstra que o problema acima possui solução única $\sigma_1(t, u)$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos, então, por (1.7) e pela definição de η_1, que $\|W(u)\| \leq 1, \forall u \in H$, e, portanto, integrando (1.13),

$$\|\sigma_1(t, u) - u\| \leq |t| \tag{1.14}$$

e

$$\frac{d[J(\sigma_1(t))]}{dt} = \langle J'(\sigma_1), \sigma_1' \rangle = -\eta_1(\sigma_1)\, \langle J'(\sigma_1), Y(\sigma_1) \rangle \leq -\alpha\, \eta_1(\sigma_1)\, \|J'(\sigma_1)\| \leq 0. \tag{1.15}$$

Desta forma, se $t_2 > t_1$,

$$J(\sigma_1(t_2, u)) \leq J(\sigma_1(t_1, u)). \tag{1.16}$$

Pela definição (1.12) de c, existe $\phi \in S$ tal que

$$\max_{v \in B_R \cap N} J(\phi(v)) < c + \delta. \tag{1.17}$$

Seja

$$K = \max_{v \in B_R \cap N} \|\phi(v)\|. \tag{1.18}$$

Tomamos, devido a (1.1), T tal que

$$\alpha \int_K^{K+T} \psi(t)\ dt > 2\delta.$$

Definimos $\phi_1 : B_R \cap N \longrightarrow H$ por

$$\phi_1(v) = \sigma_1(T, \phi(v)).$$

Afirmamos que $\phi_1 \in S$. De fato, dado $v \in \partial B_R \cap N$, como $\phi \in S$, $\phi(v) = \phi_0(v)$. De (1.4), como $c \geq m$, temos que $\phi_0(v) \notin Q'$. Mas $\eta_1(u) \equiv 0$ em $H \backslash Q'$; assim, por (1.13), temos que $\phi_1(v) = \phi_0(v)$. Uma vez que soluções do problema de valor inicial (1.13) dependem continuamente das condições iniciais e ϕ é contínua, ϕ_1 é contínua. Portanto, $\phi_1 \in S$.

Mostraremos, agora, que o máximo de $J(\phi_1)$ em $B_R \cap N$ é menor do que c, obtendo a contradição desejada. Para todo $v \in B_R \cap N$, se existe $0 \leq t_1 < T$ tal que $\sigma_1(t_1, \phi(v)) \notin Q_1'$, então, por (1.16) e (1.17), temos que

$$J(\sigma_1(T, \phi(v))) \leq J(\sigma_1(t_1, \phi(v))) < c - \delta.$$

Por outro lado, se $\sigma_1(t, \phi(v)) \in Q_1'$ para $0 \leq t \leq T$, então, por (1.15), (1.5), (1.14) e (1.18), temos

$$\begin{aligned} J(\sigma_1(T, \phi(v))) - J(\phi(v)) &\leq -\alpha \int_0^T \|J'(\sigma_1(t, \phi(v)))\|\ dt \\ &\leq -\alpha \int_0^T \psi(\|\sigma_1(t, \phi(v))\|)\ dt \leq -\alpha \int_0^T \psi(K + t)\ dt \\ &= -\alpha \int_K^{K+T} \psi(\tau)\ d\tau < -2\delta \end{aligned}$$

e, conseqüentemente, para todo $v \in B_R \cap N$, por (1.17),

$$J(\phi_1(v)) = J(\sigma_1(T, \phi(v))) < c - \delta,$$

o que contraria a definição (1.12) de c.

Logo, o teorema é verdadeiro. $\square$

Capítulo 2

Problemas Elípticos com Ressonância Forte

Apresentaremos, neste capítulo, uma aplicação do Teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1) a uma classe de problemas elípticos fortemente ressonantes (Schechter [20]). Mais precisamente, vamos demonstrar a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_l u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com bordo suave $\partial\Omega$. Estamos utilizando um domínio limitado e o operador $-\Delta$ para simplificar os cálculos e explicitar o método empregado; contudo, observamos que o resultado aqui apresentado é também válido para domínios ilimitados e para operadores auto-adjuntos em $L^2(\Omega)$ que satisfazem certas condições (Schechter [20]). No problema (2.1), $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory tal que

$$|f(x,t)| \leq a|t|^\gamma + b(x), \tag{2.2}$$

sendo $0 \leq \gamma < 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in L^2(\Omega)$, e λ_l denota o l-ésimo autovalor do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Uma solução fraca do problema (2.1) é uma função u do espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_l uv)\, dx = \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

De agora em diante, denotaremos por $|\cdot|_0$ a norma em $L^2(\Omega)$. Para $H_0^1(\Omega)$, utilizaremos a norma

$$\|u\| \stackrel{def}{=} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

O teorema a seguir nos fornece condições sobre f para que o problema (2.1) tenha solução. Antes, porém, precisamos definir $F : \Omega \times I\!R \longrightarrow I\!R$ por

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$$

e $H : \Omega \times I\!R \longrightarrow I\!R$ por

$$H(x,t) = 2F(x,t) - tf(x,t).$$

As hipóteses sobre f para que o teorema abaixo garanta a existência de uma solução fraca para o problema (2.1) são:

1. Existe $b_0 \in I\!R$ tal que $b_0 \leq \int_\Omega F(x,v(x))\,dx, \quad \forall v \in N \stackrel{def}{=} \oplus_{\lambda \leq \lambda_l} \mathcal{N}(-\Delta - \lambda);$

2. $\limsup_{|t| \to \infty} H(x,t) \leq W_1(x) \in L^1(\Omega);$

3. $H(x,t) \leq W_2(x) \in L^1(\Omega), \quad \forall t \in I\!R;$

4. $b_1 = \int_\Omega W_1(x)\,dx < 2b_0.$

2.1 - TEOREMA. *Seja λ_l tal que $\lambda_l < \lambda_{l+1}$, $l \geq 1$. Suponhamos que f satisfaça (2.2) e as hipóteses 1-4 acima. Então, o problema (2.1) possui uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Definimos $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow I\!R$ por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda_l |u|^2\right)\,dx - \int_\Omega F(x,u(x))\,dx.$$

Mostraremos agora que o funcional J satisfaz as hipóteses do teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1), com $H = H_0^1(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|$ definida em (2.4), N dado pela hipótese 1 e $M = N^\perp$.

É fato bem conhecido (Rabinowitz [16]; de Figueiredo [9]) que, quando f satisfaz (2.2), $J \in C^1(H_0^1(\Omega), I\!R)$ e, além disso,

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_l uv)\,dx - \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Assim, encontrar uma solução fraca do problema (2.1), corresponde a encontrar um ponto crítico do funcional J.

Para verificarmos as hipóteses I e II do Teorema 1.1, observemos, inicialmente, que $0 < \dim N < \infty$ e, como todo $v \in N$ é combinação linear das autofunções que geram N, temos

$$\|v\|^2 \leq \lambda_l |v|_0^2, \quad \forall v \in N. \tag{2.5}$$

Portanto, pela hipótese 1, temos que, para todo $v \in N$,

$$J(v) \leq -\int_\Omega F(x,v)\, dx \leq -b_0.$$

Decorre da definição de F e de (2.2) que

$$|F(x,t)| \leq A|t|^{1+\gamma} + B(x)$$

onde $A \in I\!R^+$ e $B(x) \in L^2(\Omega)$. Notemos que, se $w \in M$,

$$\lambda_{l+1}|w|_0^2 \leq \|w\|^2. \tag{2.6}$$

Assim, se $w \in M$,

$$\begin{aligned} J(w) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega \left(|\nabla w|^2 - \lambda_l |w|^2\right) dx - \int_\Omega F(x,w(x))\, dx \\ &\geq \tfrac{1}{2}.(\|w\|^2 - \lambda_l |w|_0^2) - \textstyle\int_\Omega \left(A|w|^{1+\gamma} + B(x)\right) dx \\ &\geq \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{\lambda_l}{\lambda_{l+1}}\right)\|w\|^2 - C|w|_0^{1+\gamma} - C \\ &\geq \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{\lambda_l}{\lambda_{l+1}}\right)\|w\|^2 - C\|w\|^{1+\gamma} - C \end{aligned}$$

onde o mesmo C denota constantes diferentes e a imersão de Sobolev foi utilizada na penúltima desigualdade (Teorema B.1, Apêndice B). Portanto, uma vez que $0 \leq \gamma < 1$, temos que J é limitado inferiormente em M e que

$$J(w) \longrightarrow \infty, \text{ quando } \|w\| \to \infty.$$

Assim, J satisfaz as hipóteses I e II do Teorema 1.1, com $m_0 = m_1 = -b_0$ e R suficientemente grande.

A seguir, mostraremos que J satisfaz também a hipótese III do Teorema 1.1 com $0 < \tau < 1$ e $\epsilon_0 = \epsilon$, sendo ϵ tomado de modo que $b_1 + 2\epsilon < 2b_0$. Seja N' o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(-\Delta - \lambda_l)$ em N, temos que $N = \mathcal{N}(-\Delta - \lambda_l) \oplus N'$. Afirmamos que, para todo R suficientemente grande,

$$\langle J'(u), u\rangle \leq \tau\, \|u\|\, \|J'(u)\|$$

acontece para todo $u \in \partial B_R$ com $J(u) \leq m_0 + \epsilon$. Caso contrário, existe uma seqüência $\{u_k\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_k\| \to \infty$ e $J(u_k) \leq m_0 + \epsilon$ mas

$$\langle J'(u_k), u_k\rangle > \tau\, \|u_k\|\, \|J'(u_k)\|. \tag{2.7}$$

Decorre das definições de H e J que

$$\langle J'(u), u\rangle = 2J(u) + \int_\Omega H(x, u(x))\, dx \tag{2.8}$$

e, pela hipótese 3, temos

$$\langle J'(u), u\rangle \leq 2(m_0 + \epsilon) + b_2$$

onde b_2 é a norma de W_2 em $L^1(\Omega)$. Logo, devido a (2.7), temos

$$\|u_k\|\, \|J'(u_k)\| \leq C_0, \text{ para algum } C_0 \in I\!R. \tag{2.9}$$

Seja $u_k = v_k + v_{0k} + w_k$, onde $v_k \in N'$, $v_{0k} \in \mathcal{N}(-\Delta - \lambda_l)$ e $w_k \in M$ (notemos que, se $l = 1$, $N' = 0$ e $v_k = 0$). Temos, então, que

$$\langle J'(u_k), w_k\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla w_k|^2 - \lambda_l |w_k|^2\right) dx - \int_\Omega f(x, u_k) w_k\, dx$$

e

$$\langle J'(u_k), v_k\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla v_k|^2 - \lambda_l |v_k|^2\right) dx - \int_\Omega f(x, u_k) v_k\, dx.$$

Portanto, devido a (2.6), (2.9), (2.2) e à imersão de Sobolev,

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega \left(|\nabla w_k|^2 - \lambda_l |w_k|^2\right) dx &= \int_\Omega f(x, u_k) w_k\, dx + \langle J'(u_k), w_k\rangle \\ &\leq \int_\Omega |f(x, u_k)||w_k|\, dx + C_0 \\ &\leq (C\|u_k\|^\gamma + C)\|w_k\| + C_0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde o mesmo C denota constantes diferentes. Analogamente,

$$\left| \int_\Omega \left(|\nabla v_k|^2 - \lambda_l |v_k|^2\right) dx \right| \leq (C\|u_k\|^\gamma + C)\, \|v_k\| + C_0. \tag{2.11}$$

Sejam

$$\tilde{v}_k = \frac{v_k}{\|u_k\|} \text{ e } \tilde{w}_k = \frac{w_k}{\|u_k\|}.$$

De acordo com (2.10), como $0 \leq \gamma < 1$ e $\|u_k\| \to \infty$, quando $k \to \infty$, tem-se

$$\int_\Omega \left(|\nabla \tilde{w}_k|^2 - \lambda_l |\tilde{w}_k|^2\right) dx \longrightarrow 0$$

e, por (2.6), $\|\tilde{w}_k\| \to 0$. Do mesmo modo, por (2.11), temos

$$\int_\Omega \left(|\nabla \tilde{v}_k|^2 - \lambda_l |\tilde{v}_k|^2\right) dx \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

Para ver que $\|\tilde{v}_k\| \to 0$, quando $k \to \infty$, no caso em que $l > 1$, lembramos que, pela definição de N', N' é gerado por autofunções ϕ_j correspondentes aos autovalores λ_j do problema (2.3) sendo $j \leq p$, onde $\lambda_p < \lambda_{p+1} = \lambda_l$ (isto é possível pois estamos considerando o caso $l \geq 2$); podemos tomar $|\phi_j|_0 = 1$. Temos, assim, que

$$\tilde{v}_k = \sum c_{jk}\phi_j$$

onde $c_{jk} \in I\!R$, de forma que

$$|\tilde{v}_k|_0^2 = \sum c_{jk}^2|\phi_j|_0 = \sum c_{jk}^2$$

e

$$\|\tilde{v}_k\|^2 = \sum c_{jk}^2\|\phi_j\| = \sum c_{jk}^2\lambda_j|\phi_j|^2 = \sum c_{jk}^2\lambda_j.$$

Assim,

$$\|\tilde{v}_k\|^2 \leq \lambda_p|\tilde{v}_k|_0^2. \tag{2.13}$$

Lembrando que $\lambda_j \leq \lambda_p < \lambda_l$ obtemos

$$\left|\int_\Omega \left(|\nabla\tilde{v}_k|^2 - \lambda_l|\tilde{v}_k|^2\right)\, dx\right| = \sum c_{jk}^2(\lambda_l - \lambda_j) \geq (\lambda_l - \lambda_p)|\tilde{v}_k|_0^2.$$

Logo, de (2.12) e (2.13), temos que $\|\tilde{v}_k\| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Denotemos por $\tilde{u}_k$ e $\tilde{v}_{0k}$ os quocientes de u_k e v_{0k}, respectivamente, por $\|u_k\|$. Como a imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta e $\|\tilde{u}_k\| = 1$, passando a subseqüências sucessivas temos que

$$\tilde{u}_k \rightharpoonup \tilde{u} \text{ em } H_0^1(\Omega), \;\; \tilde{u}_k \to \tilde{u} \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \tilde{u}_k(x) \to \tilde{u}(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Logo, visto que $\|\tilde{v}_k\| \to 0$ e $\|\tilde{w}_k\| \to 0$, temos

$$\tilde{v}_{0k} \rightharpoonup \tilde{u} \text{ em } H_0^1(\Omega), \;\; \tilde{v}_{0k} \to \tilde{u} \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \|\tilde{v}_{0k}\| \to 1.$$

Então, $\tilde{u}$ é uma autofunção do problema (2.3) correspondente a λ_l, pois $\mathcal{N}(-\Delta - \lambda_l)$ é fechado na topologia fraca de $H_0^1(\Omega)$ e $1 = \lim\|\tilde{v}_{0k}\|^2 = \lambda_l|\tilde{u}|_0^2$. Portanto, $\tilde{u}(x) \neq 0$ q.t.p. em Ω e

$$|u_k(x)| = \|u_k\|\, |\tilde{u}_k(x)| \to \infty, \text{ quando } k \to \infty, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Logo, pela hipótese 2,

$$\limsup_{k\to\infty} H(x, u_k(x)) \leq W_1(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Aplicando o Lema de Fatou (devido à hipótese 3), temos que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_\Omega H(x, u_k(x)) \leq b_1 \tag{2.14}$$

e, por (2.8),

$$\limsup_{k\to\infty}\langle J'(u_k), u_k\rangle \leq 2(m_0 + \epsilon) + b_1 < 0$$

o que contradiz (2.7). Desta forma, a hipótese III do Teorema 1.1 é satisfeita para todo R suficientemente grande.

Podemos, então, aplicar o Teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1) com

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t} \in \Psi$$

para obtermos uma seqüência $\{u_k\}$ em $H_0^1(\Omega)$ e $c \in I\!R$ tais que, quando $k \to \infty$,

$$J(u_k) \longrightarrow c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_k\|)\|J'(u_k)\| \longrightarrow 0. \tag{2.15}$$

Vamos mostrar que $\{u_k\}$ é limitada. De (2.15), devemos ter $\|u_k\|\ \|J'(u_k)\| \leq C_1$, para todo k e algum $C_1 \in I\!R$. Se $\{u_k\}$ possui alguma subseqüência, ainda denotada por $\{u_k\}$, com $\|u_k\| \to \infty$, procedemos de modo análogo ao que fizemos acima para concluir que $|u_k(x)| \to \infty$ q.t.p. em Ω e, então, obtermos (2.14). Como $c \leq m_1 = m_0 = -b_0$, por (2.8),

$$\limsup_{k\to\infty} \langle J'(u_k), u_k\rangle \leq 2c + b_1 < 0$$

o que é uma contradição, pois segue de (2.15) que

$$|\langle J'(u_k), u_k\rangle| \leq \|u_k\|\ \|J'(u_k)\| \longrightarrow 0.$$

Deste modo, $\|u_k\| \leq K$ para algum $K \in I\!R$. Logo, em vista da imersão de Sobolev, tomando sucessivas subseqüências, ainda denotadas por $\{u_k\}$, temos que

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega), \ u_k \to u \text{ em } L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad u_k \to u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como f satisfaz (2.2), temos a continuidade do operador de Nemytskii associado a f de $L^2(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ (Teorema B.2, Apêndice B) e, então,

$$\int_\Omega (\nabla u_k \cdot \nabla v - \lambda_l u_k v)\, dx - \int_\Omega f(x, u_k) v\, dx \longrightarrow \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_l u v)\, dx - \int_\Omega f(x, u) v\, dx,$$

ou seja,

$$\langle J'(u_k), v\rangle \longrightarrow \langle J'(u), v\rangle$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. Logo, segue de (2.15) que u é um ponto crítico de J e, por conseguinte, uma solução fraca do problema (2.1). □

Capítulo 3

Problemas Elípticos com Ressonância Dupla

Neste capítulo, apresentaremos outra aplicação do Teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1), desta vez ao estudo de problemas de Dirichlet semilineares com ressonância dupla (Gonçalves, de Pádua & Carrião [11]). De modo mais específico, vamos obter uma solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado, com bordo suave $\partial\Omega$ e $f : \Omega \times I\!R \longrightarrow I\!R$ é uma função de Carathéodory tal que:

$$|f(x,t)| \leq a|t|^{\sigma} + b \tag{3.2}$$

sendo $a, b > 0$, $1 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, se $N \geq 3$, e $1 \leq \sigma < \infty$, para $N = 1, 2$.

Sejam F e H as funções definidas no capítulo anterior, e

$$L(x) \stackrel{def}{=} \liminf_{|t|\to\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} \quad \text{e} \quad K(x) \stackrel{def}{=} \limsup_{|t|\to\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2},$$

onde os limites são tomados ponto a ponto. Trataremos o problema (3.1) no caso duplamente ressonante, i.e., quando

$$\lambda_l \leq L(x) \leq K(x) \leq \lambda_{l+1} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

onde λ_l denota o l-ésimo autovalor do problema (2.3).

Como no Teorema 2.1, utilizaremos um funcional $J \in C^1(H_0^1(\Omega), I\!R)$ cujos pontos críticos correspondem a soluções fracas de (3.1). Definimos, assim,

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u(x))\,dx.$$

Usaremos a decomposição

$$H_0^1(\Omega) = N \oplus M \tag{3.3}$$

onde $N = \oplus_{\lambda \leq \lambda_l} \mathcal{N}(-\Delta - \lambda)$ e $M = N^{\perp}$.

O teorema a seguir assegura a existência de uma solução fraca do problema (3.1) sob as seguintes condições:

1. (a) $H(x,t) \to -\infty$, quando $|t| \to \infty$, q.t.p. $x \in \Omega$;

   (b) $H(x,t) \leq M(x)$ q.t.p. $x \in \Omega$ para algum $M \in L^1(\Omega)$;

2. Para cada $\epsilon > 0$, existe $A_\epsilon \in L^1(\Omega)$ tal que

$$2F(x,t) \geq (\lambda_l - \epsilon)t^2 - A_\epsilon(x), \ \forall t \in I\!R, \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

3.1 - TEOREMA. *Seja $\lambda_l < \lambda_{l+1}$, $l \geq 1$. Suponhamos que f satisfaça (3.2) e as condições 1 e 2 e que $K(x) \leq \lambda_{l+1}$ q.t.p. em Ω. Então, o problema (3.1) possui uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$, desde que $\sup_{v \in N} J(v) < \infty$.*

Antes de demonstrar o Teorema 3.1, apresentaremos uma proposição que fornece condições sobre F para que o funcional J seja limitado superiormente em N, no caso $l \geq 2$. Para enunciar essa proposição, introduzimos as condições

$$\int_{v<0} [L(x) - \lambda_l] v^2 \, dx + \int_{v>0} [K(x) - \lambda_l] v^2 \, dx > 0, \quad \forall v \in \mathcal{N}_l, v \neq 0 \tag{3.4}$$

e

$$\liminf \int_\Omega [2F(x, v_n) - \lambda_l v_n^2] \, dx > -\infty, \quad \forall \{v_n\} \in \mathcal{A}, \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{N}_l = \mathcal{N}(-\Delta - \lambda_l)$ e denotamos por $\mathcal{A}$ o conjunto de todas as seqüências $\{v_n\} \subset N$ tais que $\|v_n\| \to \infty$ e $\|v_{1n}\| \ \|v_{2n}\|^{-1} \to 0$ quando $n \to \infty$, sendo $v_n = v_{1n} + v_{2n}$, com $v_{1n} \in \mathcal{N}_l^{\perp}$ ($\perp$ em N) e $v_{2n} \in \mathcal{N}_l$.

3.2 - PROPOSIÇÃO. *Seja f como em (3.2), suponhamos que a condição 2 seja satisfeita e que $l \geq 2$. Temos que:*

(i) *se vale (3.5), então $\sup_{v \in N} J(v) < \infty$;*

(ii) *se vale (3.4) e se supusermos que ou*

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} = L(x) \quad e \quad \lim_{t \to +\infty} \frac{2F(x,t)}{t^2} = K(x) \tag{3.6}$$

ou

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{2F(x,t)}{t^2}=K(x) \quad e \quad \lim_{t\to+\infty}\frac{2F(x,t)}{t^2}=L(x) \tag{3.7}$$

existem q.t.p. $x\in\Omega$*, então* $J(v)\to-\infty$ *quando* $\|v\|\to\infty$.

Resultados similares foram obtidos também para o caso em que $H(x,t)\to+\infty$ quando $|t|\to\infty$ e desigualdades análogas valem nas condições 1 e 2 e em (3.4) e (3.5) (Gonçalves, de Pádua & Carrião [11]).

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 3.2: Para demonstrarmos (i), suponhamos, por contradição, que $J(v_n)\to\infty$ para alguma seqüência $\{v_n\}\subset N$.

Afirmamos que $\|v_n\|\to\infty$. Caso contrário, existe uma subseqüência, ainda denotada por $\{v_n\}$, tal que $\|v_n\|\le K$, para algum $K\in I\!R$. Mostraremos que $J(v_n)$ é limitado superiormente. Uma vez que f satisfaz (3.2), temos que

$$|F(x,t)|\le A|t|^{\sigma+1}+B$$

onde A e B são constantes positivas. Assim,

$$\left|\int_\Omega F(x,v_n(x))\,dx\right|\le A\|v_n\|^{\sigma+1}_{L^{\sigma+1}}+B|\Omega|.$$

Como a imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^{\sigma+1}(\Omega)$ é contínua e $\|v_n\|\le K$, temos que $\|v_n\|_{L^{\sigma+1}}$ é limitada. Portanto, $J(v_n)$ é limitado superiormente, o que contradiz $J(v_n)\to\infty$. Isso demonstra que $\|v_n\|\to\infty$.

Escrevendo $v_n=v_{1n}+v_{2n}$, com $v_{1n}\in\mathcal{N}_l^\perp$ ($\perp$ em N) e $v_{2n}\in\mathcal{N}_l$, devemos ter que: ou existem $k>0$ e uma subseqüência $\{v_{n'}\}$ de $\{v_n\}$ tais que $k\|v_{1n'}\|\ge\|v_{2n'}\|$, $\forall n'$; ou $\|v_{1n}\|\,\|v_{2n}\|^{-1}\to0$ quando $n\to\infty$.

No primeiro caso, segue da hipótese 2 que

$$\begin{aligned}
2J(v_{n'}) &= \int_\Omega\left(|\nabla v_{n'}|^2-\lambda_l v_{n'}^2\right)\,dx-\int_\Omega\left(2F(x,v_{n'})-\lambda_l v_{n'}^2\right)\,dx\\
&\le \int_\Omega|\nabla v_{1n'}|^2\,dx-\lambda_l\int_\Omega v_{1n'}^2\,dx+\int_\Omega\left(\epsilon v_{n'}^2+A_\epsilon(x)\right)\,dx\\
&= \|v_{1n'}\|^2-(\lambda_l-\epsilon)\int_\Omega v_{1n'}^2\,dx+\epsilon\int_\Omega v_{2n'}^2\,dx+\int_\Omega A_\epsilon(x)\,dx\\
&\le \|v_{1n'}\|^2-\frac{\lambda_l-\epsilon}{\lambda_p}\|v_{1n'}\|^2+\epsilon\lambda_l\|v_{2n'}\|^2+\|A_\epsilon\|_{L^1}\\
&\le \left(1-\frac{\lambda_l-\epsilon}{\lambda_p}+\epsilon\lambda_l k\right)\|v_{1n'}\|^2+\|A_\epsilon\|_{L^1},
\end{aligned}$$

onde $\lambda_p < \lambda_{p+1} = \lambda_l$ (tal p existe pois $l \geq 2$). Como $\|v'_n\| \to \infty$ e $k\|v_{1n'}\| \geq \|v_{2n'}\|$, tomando ϵ suficientemente pequeno, temos que $J(v_{n'}) \to -\infty$, de modo que a primeira alternativa não pode ocorrer. Portanto, a segunda possibilidade deve acontecer.

No segundo caso, $\|v_{1n}\| \; \|v_{2n}\|^{-1} \to 0$ quando $n \to \infty$, e, conseqüentemente, $\{v_n\} \in \mathcal{A}$. Notemos que, por (2.5),

$$
\begin{aligned}
2J(v_n) &= \int_\Omega \left(|\nabla v_n|^2 - \lambda_l v_n^2\right) dx - \int_\Omega \left(2F(x, v_n) - \lambda_l v_n^2\right) dx \\
&\leq -\int_\Omega \left(2F(x, v_n) - \lambda_l v_n^2\right) dx
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Assim, decorre de (3.5) que $\limsup J(v_n) < \infty$, o que é uma contradição. Desta forma, (i) fica demonstrada.

Para demonstrarmos (ii), tomemos qualquer seqüência $\{v_n\} \subset N$ com $\|v_n\| \to \infty$. Vamos mostrar que toda subseqüência de $\{J(v_n)\}$ possui subseqüência convergente para $-\infty$. Denotando ainda por $\{v_n\}$ uma subseqüência qualquer de $\{v_n\}$, e decompondo $v_n = v_{1n} + v_{2n}$, com $v_{1n} \in \mathcal{N}_l^\perp$ e $v_{2n} \in \mathcal{N}_l$, como acima, temos as mesmas duas possibilidades que consideramos em (i).

Na primeira alternativa, o mesmo argumento aplicado acima, nos garante que $J(v_{n'}) \to -\infty$, para alguma subseqüência $\{v'_n\}$ de $\{v_n\}$.

No outro caso, temos que $\|v_{1n}\| \; \|v_{2n}\|^{-1} \to 0$ quando $n \to \infty$. Seja $\tilde{v}_n = \|v_n\|^{-1} v_n$. Como $\{\tilde{v}_n\}$ é uma seqüência limitada e a imersão de Sobolev de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, passando a sucessivas subseqüências e mantendo a notação, temos que

$$
\tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{v} \text{ em } H_0^1(\Omega),\; \tilde{v}_n \to \tilde{v} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \tilde{v}_n(x) \to \tilde{v}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.
$$

Além disso, existe $\theta \in L^2(\Omega)$ tal que $|\tilde{v}_n| \leq \theta$ q.t.p. em Ω. Uma vez que $\|v_{1n}\| \; \|v_{2n}\|^{-1} \to 0$ quando $n \to \infty$, temos que $\|\tilde{v}_{1n}\| \to 0$ e $\|\tilde{v}_{2n}\| \to 1$, onde $\tilde{v}_{1n}$ e $\tilde{v}_{2n}$ denotam, respectivamente, os quocientes de v_{1n} e v_{2n} por $\|v_n\|$. Desta forma, $\tilde{v}_{2n} \rightharpoonup \tilde{v}$ e como $\mathcal{N}_l$ é fechado na topologia fraca de $H_0^1(\Omega)$, $\tilde{v} \in \mathcal{N}_l$. Assim, como $1 = \lim \|\tilde{v}_{2n}\|^2 = \lambda_l |\tilde{v}|_0^2$, $\tilde{v}$ é uma autofunção de (2.3) e, conseqüentemente, $|\tilde{v}(x)| > 0$ q.t.p. em Ω. Portanto,

$$
|v_n(x)| = \|v_n\| \; |\tilde{v}_n(x)| \to \infty \text{ q.t.p. } x \in \Omega.
$$

Consideremos a expressão

$$
\|v_n\|^2 \int_\Omega \left(\frac{2F(x, v_n)}{\|v_n\|^2} - \lambda_l \frac{v_n^2}{\|v_n\|^2} \right) = \|v_n\|^2 \int_\Omega \left(\frac{2F(x, \tilde{v}_n \|v_n\|)}{(\tilde{v}_n \|v_n\|)^2} \tilde{v}_n^2 - \lambda_l \tilde{v}_n^2 \right) \chi_{\{\tilde{v}_n \neq 0\}}. \tag{3.9}
$$

Segue da hipótese 2 que o integrando do primeiro membro acima é limitado inferiormente por

$$
-\epsilon \tilde{v}_n^2(x) - \|v_n\|^{-2} A_\epsilon(x) \geq -\epsilon \theta^2(x) - |A_\epsilon(x)|
$$

visto que podemos supor $\|v_n\| \geq 1$, $\forall n$. Podemos aplicar o Lema de Fatou a (3.9) para obter, por (3.6) (ou por (3.7)) e por (3.4), que a integral do segundo membro de (3.9) possui limite inferior estritamente positivo. Portanto, em virtude de (3.8), $J(v_n) \to -\infty$.

Como toda subseqüência de $\{J(v_n)\}$ possui subseqüência convergente para $-\infty$, temos que $J(v_n) \to -\infty$. Isto encerra a demonstração da proposição. □

Demonstraremos, agora, três resultados auxiliares que serão utilizados na demonstração do Teorema 3.1. Para isso, definimos $G : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$G(x,t) = F(x,t) - \frac{1}{2}K(x)t^2.$$

Afirmamos, como em Costa e Magalhães [8], que

$$G(x,t) \longrightarrow -\infty, \text{ quando } |t| \to \infty, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega. \tag{3.10}$$

De fato, segue da condição 1a que, fixado $C > 0$, existe $t_0 = t_0(x) > 0$ tal que $H(x,t) \leq -C$ para $|t| \geq t_0$ q.t.p. em Ω. Integrando a relação

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-2}F(x,t)\right] = -t^{-3}H(x,t),$$

a qual foi também utilizada por Schechter em [18], obtemos

$$\frac{F(x,u)}{u^2} - \frac{F(x,t)}{t^2} \geq \frac{C}{2}\left(-\frac{1}{u^2} + \frac{1}{t^2}\right).$$

Tomando o limite superior nesta desigualdade, temos (3.10). Trocando C por $M(x)$ dado na condição 1a, obtemos, analogamente,

$$G(x,t) \leq \alpha(x), \ t \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. } x \in \Omega, \text{ para algum } \alpha(x) \in L^1(\Omega). \tag{3.11}$$

Iniciamos com um lema técnico que será usado nos resultados posteriores.

3.3 - LEMA. *Suponhamos f como em (3.2), $K(x) \leq \lambda_{l+1}$ q.t.p. em Ω e que a condição 1 seja satisfeita. Seja $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $\sup J(u_n) < \infty$. Então, existem $\Omega_0 \subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$ e uma subseqüência $\{u_{n'}\}$ de $\{u_n\}$ tais que $|u_{n'}(x)| \to \infty$ para todo x em Ω_0.*

DEMONSTRAÇÃO: Decorre de (3.11) que

$$\limsup \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega \left(2F(x,u_n) - \lambda_{l+1}u_n^2\right)\, dx \leq 0.$$

Mas

$$\frac{J(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2\|u_n\|^2}\left[\int_\Omega \left(|\nabla u_n|^2 - \lambda_{l+1}u_n^2\right)\, dx - \int_\Omega \left(2F(x,u_n) - \lambda_{l+1}u_n^2\right)\, dx\right]. \tag{3.12}$$

Seja $\tilde{u}_n = \|u_n\|^{-1}u_n$. Logo $\|\tilde{u}_n\| = 1$ e, como a imersão de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, podemos tomar sucessivas subseqüências, para obter

$$\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u} \text{ em } H_0^1(\Omega),\ \tilde{u}_n \to \tilde{u} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \tilde{u}_n(x) \to \tilde{u}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Tomando, agora, o limite inferior em (3.12) temos que

$$0 \geq \frac{1}{2}\left(1 - \lambda_{l+1}|\tilde{u}|_0^2\right)$$

e, conseqüentemente, $|\tilde{u}|_0^2 > 0$. Deste modo, existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $|\Omega_0| > 0$ e $|\tilde{u}(x)| > 0$, $\forall x \in \Omega_0$. Assim, $|u_n(x)| \to \infty$, $\forall x \in \Omega_0$. Isto conclui a demonstração do lema. □

A proposição seguinte servirá para verificar a hipótese II do Teorema 1.1.

3.4 - PROPOSIÇÃO. *Suponhamos f como em (3.2), $K(x) \leq \lambda_{l+1}$ q.t.p. em Ω e que a condição 1 seja satisfeita. Então, $J(w) \to \infty$ quando $\|w\| \to \infty$, onde $w \in M$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que exista alguma seqüência $\{w_n\}$ em M tal que $\|w_n\| \to \infty$ mas $\sup J(w_n) < \infty$. Pela definição de G e por (2.6), temos que

$$\begin{aligned} J(w_n) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega \left(|\nabla w_n|^2 - K(x)w_n^2\right)\, dx - \int_\Omega G(x, w_n)\, dx \\ &\geq -\textstyle\int_\Omega G(x, w_n)\, dx. \end{aligned}$$

Sejam $\Omega_0 \subset \Omega$ e $\{w_{n'}\}$ obtidos pela aplicação do Lema 3.3. Então, por (3.11),

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\Omega G(x, w_{n'})\, dx &= \textstyle\int_{\Omega\setminus\Omega_0} G(x, w_{n'})\, dx + \int_{\Omega_0} G(x, w_{n'})\, dx \\ &\leq \textstyle\int_\Omega |\alpha(x)|\, dx + \int_{\Omega_0} G(x, w_{n'})\, dx, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$J(w_{n'}) \geq -\int_\Omega |\alpha(x)|\, dx - \int_{\Omega_0} G(x, w_{n'})\, dx.$$

Tendo em vista (3.11), podemos aplicar o Lema de Fatou a esta última desigualdade e, por (3.10), temos que $J(w_{n'}) \to \infty$, o que é uma contradição. Desta forma, fica demonstrada a proposição. □

A próxima proposição será utilizada na verificação da hipótese III do Teorema 1.1.

3.5 - PROPOSIÇÃO. *Suponhamos f como em (3.2), $K(x) \leq \lambda_{l+1}$ q.t.p. em Ω e que a condição 1 seja satisfeita. Então, fixados $\tau \in (0,1)$ e $c \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que*

$$\langle J'(u), u\rangle \leq \tau\, \|u\|\, \|J'(u)\|$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ com $\|u\| \geq R$ e $J(u) \leq c$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, por contradição, que exista alguma seqüência $\{u_n\}$ em H_0^1 tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $\sup J(u_n) \leq c$, mas com

$$\langle J'(u_n), u_n \rangle > \tau \, \|u_n\| \, \|J'(u_n)\|.$$

Sejam $\Omega_0 \subset \Omega$ e $\{u_{n'}\}$ obtidos pela aplicação do Lema 3.3. Assim, $|u_{n'}(x)| \to \infty$ para todo x em Ω_0. Temos, pela condição 1b, que

$$\begin{aligned} \int_\Omega H(x, u_{n'})\, dx &= \int_{\Omega \setminus \Omega_0} H(x, u_{n'})\, dx + \int_{\Omega_0} H(x, u_{n'})\, dx \\ &\leq \int_\Omega |M(x)|\, dx + \int_{\Omega_0} H(x, u_{n'})\, dx. \end{aligned}$$

Decorre da condição 1 e do Lema de Fatou que

$$\liminf \int_\Omega H(x, u_{n'})\, dx = -\infty. \tag{3.13}$$

Por outro lado, pela definição de H,

$$\int_\Omega H(x, u_{n'})\, dx = -2J(u_{n'}) + \langle J'(u_{n'}), u_{n'} \rangle \geq -2c,$$

o que contradiz (3.13). A proposição está demontrada. □

Podemos, agora, demonstrar o Teorema 3.1.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1: Mostraremos, inicialmente, que o funcional J satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1) com $H = H_0^1$ munido da norma $\|\cdot\|$ definida em (2.4) e com a decomposição dada em (3.3). Notemos, inicialmente, que $0 < \dim N < \infty$. Pela Proposição 3.4, J é coercivo em M e, como J é fracamente semi-contínuo inferiormente (e.g. de Figueiredo [9]), J é limitado inferiormente em M. Assim, as hipóteses I e II do Teorema 1.1 são satisfeitas. Aplicando a Proposição 3.5, temos que a hipótese III do Teorema 1.1 é também satisfeita.

Assim, podemos aplicar o Teorema 1.1, com

$$\psi(t) = \frac{1}{1+t} \in \Psi,$$

para obter uma seqüência $\{u_n\} \subset H_0^1$ e $c \in I\!R$ tais que

$$J(u_n) \longrightarrow c \quad \text{e} \quad (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\| \longrightarrow 0. \tag{3.14}$$

Afirmamos que a seqüência acima é limitada. Caso contrário, podemos obter uma subseqüência, ainda denotada por $\{u_n\}$, tal que $\|u_n\| \to \infty$. Aplicamos o Lema 3.3 para obter $\Omega_0 \subset \Omega$ com $|\Omega_0| > 0$ e uma subseqüência $\{u_{n'}\}$ de $\{u_n\}$ tais que $|u_{n'}(x)| \to \infty$ para todo x em Ω_0. Deste modo,

$$\int_\Omega H(x, u_{n'})\, dx \leq \int_\Omega |M(x)|\, dx + \int_{\Omega_0} H(x, u_{n'})\, dx \tag{3.15}$$

e, por outro lado, segue de (3.14) que,

$$\int_\Omega H(x, u_{n'})\, dx = -2J(u_{n'}) + \langle J'(u_{n'}), u_{n'} \rangle \geq C \tag{3.16}$$

para algum $C \in I\!R$. Aplicamos, agora, o Lema de Fatou a (3.15); pela hipótese 1a, o resultado obtido contradiz (3.16), o que demonstra nossa afirmativa.

Utilizaremos, agora, essa limitação e um argumento bem conhecido para obtermos o ponto crítico. Decorre da imersão de Sobolev que uma subseqüência de $\{u_n\}$, ainda denotada por $\{u_n\}$, converge fracamente para u em $H_0^1(\Omega)$ e fortemente em L^2 para o mesmo u. Por outro lado, segue de (3.14) que $\|J'(u_n)\| \to 0$ e, portanto,

$$\left| \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla h\, dx - \int_\Omega f(x, u_n(x)) h\, dx \right| \leq \epsilon_n \|h\|, \quad \forall h \in H_0^1(\Omega),$$

onde $\epsilon_n \to 0$. Tomando $h = u_n - u$ nesta desigualdade e utilizando a continuidade do operador de Nemytskii, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla (u_n - u)\, dx \longrightarrow 0.$$

Assim, $\|u_n\| \to \|u\|$ e, como $u_n \rightharpoonup u$, temos que u_n converge fortemente para u em $H_0^1(\Omega)$. Como J é continuamente diferenciável, temos que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$, isto é, u é uma solução fraca do problema (3.1). Isto completa a demonstração do teorema. □

Apêndice A

Construção do Campo Pseudo-Gradiente

No Capítulo 1, para demonstrar o Teorema do Ponto de Sela de Schechter (Teorema 1.1), utilizamos a construção de um campo pseudo-gradiente que agora demonstraremos. Esta construção é similar à encontrada em Schechter [17].

A.1 - LEMA. *Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Sejam $0 < \tau < 1$ e $0 < \alpha < 1-\tau$. Então, para quaisquer $u, v \in H$ não-nulos tais que $\langle u, v\rangle \leq \tau \, \|u\| \, \|v\|$, existe $h \in H$ tal que $\langle u, h\rangle > \alpha \, \|u\| \, \|h\|$ e $\langle h, v\rangle < 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como u e v não são nulos, definimos

$$\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{e} \quad \tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Tomamos β tal que

$$\tau < \beta < \frac{\tau}{\alpha + \tau}. \tag{A.1}$$

Seja $h = \tilde{u} - \beta\tilde{v}$. Temos então que:

$$\|h\| \leq \|\tilde{u}\| + \|\beta\tilde{v}\| = 1 + \beta,$$

$$\langle h, v\rangle = \langle \tilde{u}, v\rangle - \beta\langle \tilde{v}, v\rangle \leq \|v\| \, (\tau - \beta) < 0$$

e

$$\langle u, h\rangle = \langle u, \tilde{u}\rangle - \beta\langle u, \tilde{v}\rangle \geq \|u\| \, (1 - \tau\beta) > \|u\| \, \alpha(1+\beta) \geq \alpha \, \|u\| \, \|h\|,$$

pois a segunda desigualdade de (A.1) é equivalente a

$$1 - \tau\beta > 1 - \tau + \alpha\beta$$

e, como $\alpha < 1 - \tau$,

$$1 - \tau\beta > \alpha(1+\beta).$$

Assim, o lema está demonstrado. □

A.2 - PROPOSIÇÃO (Construção do Campo Pseudo-Gradiente). *Sejam $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável, onde $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert, e $\hat{H} = \{u \in H : J'(u) \neq 0\}$. Suponhamos que exista $0 < \tau < 1$ tal que*

$$\langle J'(u), u \rangle \leq \tau \, \|u\| \, \|J'(u)\|, \ \forall u \in F, \tag{A.2}$$

onde F é um subconjunto fechado de $\hat{H}$, $0 \notin F$, e $0 < \alpha < 1 - \tau$. Então, existe um campo $Y : \hat{H} \longrightarrow H$ localmente lipschitziano tal que

$$\|Y(u)\| \leq 1 \quad e \quad \langle J'(u), Y(u) \rangle \geq \alpha \, \|J'(u)\|, \ \ \forall u \in \hat{H}$$

e ainda $\langle Y(u), u \rangle < 0$, $\forall u \in F$.

DEMONSTRAÇÃO: Para cada $u \in F$, temos que $J'(u) \neq 0$ e $u \neq 0$. De acordo com o lema anterior, existe $h(u) \in H$ tal que

$$\langle J'(u), h(u) \rangle > \alpha \, \|J'(u)\| \, \|h(u)\| \quad \text{e} \quad \langle h(u), u \rangle < 0.$$

Definimos $\tilde{h} : \hat{H} \longrightarrow H$ por

$$\tilde{h}(u) = \begin{cases} \dfrac{h(u)}{\|h(u)\|}, & u \in F \\[2ex] \dfrac{J'(u)}{\|J'(u)\|}, & u \notin F \end{cases}$$

de modo a termos

$$\|\tilde{h}(u)\| = 1 \quad \text{e} \quad \langle J'(u), \tilde{h}(u) \rangle > \alpha \, \|J'(u)\|, \ \ \forall u \in \hat{H}$$

e ainda $\langle \tilde{h}(u), u \rangle < 0$, $\forall u \in F$.

Pela continuidade de J', para cada $u \in \hat{H}$, existe uma vizinhança V_u de u em $\hat{H}$ tal que

$$\langle J'(v), \tilde{h}(u) \rangle \geq \alpha \, \|J'(v)\|, \ \ \forall v \in V_u. \tag{A.3}$$

Se $u \in F$, podemos tomar V_u de modo que $\langle \tilde{h}(u), v \rangle < 0$, $v \in V_u$, pois $\langle \tilde{h}(u), u \rangle < 0$ e o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é contínuo. Caso u não pertença a F, como F é fechado, podemos tomar V_u de forma que $V_u \cap F = \emptyset$. O conjunto de todas as vizinhanças V_u, $u \in \hat{H}$, é uma cobertura aberta de $\hat{H}$. Como $\hat{H}$ é um espaço métrico, pelo Teorema de Stone, temos que $\hat{H}$ é paracompacto (Kelley [12]; Zumpano [23]). Deste modo, esta cobertura admite um refinamento localmente finito denotado por $\{W_j\}$. Seja $\rho_j(v)$ a distância de v ao complemento de W_j. Então, ρ_j é lipschitziana e $\rho_j(v) = 0$ se $v \notin W_j$. Seja

$$\beta_j(v) = \frac{\rho_j(v)}{\sum \rho_k(v)}.$$

Observamos que β_j está bem definida, pois para cada $v \in \hat{H}$ a soma no denominador é finita (visto que o refinamento $\{W_j\}$ é localmente finito). Temos, portanto, uma partição da unidade $\{\beta_j\}$ localmente lipschitziana. Notemos que cada W_j está contido em alguma vizinhança V_u, de modo que, para cada Wj fixamos u_j de modo que $W_j \subset V_{u_j}$. Seja $Y : \hat{H} \longrightarrow H$ definido por:

$$Y(v) = \sum \beta_j(v) h_j$$

onde $h_j = \tilde{h}(u_j)$. O campo Y está bem definido pois a partição $\{\beta_j\}$ é localmente finita. Uma vez que cada β_j é localmente lipschitziana, Y é localmente lipschitziano. Além disso, para todo $v \in \hat{H}$, temos

$$\|Y(v)\| = \left\|\sum \beta_j(v) h_j\right\| \leq \sum \|\beta_j(v) h_j\| = \sum \beta_j(v) \|h_j\| = \sum \beta_j(v) = 1$$

e, por (A.3),

$$\begin{aligned} \langle J'(v), Y(v)\rangle &= \langle J'(v), \textstyle\sum \beta_j(v) h_j\rangle = \sum \langle J'(v), \beta_j(v) h_j\rangle \\ &= \sum \beta_j(v) \langle J'(v), h_j\rangle \geq \sum \beta_j(v) \alpha \|J'(v)\| = \alpha \|J'(v)\|. \end{aligned}$$

Para $v \in F$, $\beta_j(v) = 0$ se $u_j \notin F$. Assim,

$$\langle Y(v), v\rangle = \sum \beta_j(v) \, \langle h_j, v\rangle < 0$$

pois $\langle h_j, v\rangle < 0$, se $v \in V_{u_j}$ e $u_j \in F$. Logo, Y é um campo como desejado. □

Apêndice B

Regularidade das Soluções Fracas Obtidas

Usaremos teoremas de regularidade para equações elípticas para mostrar que as soluções fracas obtidas nos Capítulos 2 e 3 são de fato soluções clássicas, desde que o termo não linear seja localmente lipschitziano.

Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado, com bordo suave $\partial\Omega$, $N \geq 3$ e $f : \overline{\Omega} \times I\!R \longrightarrow I\!R$ é localmente lipschitziana com crescimento subcrítico, i.e.,

$$|f(x,t)| \leq a|t|^{\sigma} + b, \ \forall t \in I\!R, \forall x \in \overline{\Omega} \tag{B.2}$$

sendo $a, b > 0$, $0 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$. Para ser breve, não trataremos os casos em que $N = 1, 2$ e b é uma função de x.

Necessitaremos das imersões de Sobolev a seguir (Adams [1], Th.5.4, Th.6.2); na mesma referência encontramos as definições dos espaços de Banach $W^{k,p}(\Omega)$ e $C^{\lambda}(\Omega)$.

B.1 - TEOREMA. *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado com bordo suave, $1 \leq p < \infty$. Então, as seguintes imersões são contínuas:*

(i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *para* $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$, $kp < N$; *se* $kp = N$, *podemos tomar* $1 \leq q < \infty$.

Além disso, essa imersão é compacta quando $q < \frac{Np}{N-kp}$.

(ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\lambda}(\overline{\Omega})$ *para algum* $0 < \lambda < 1$, *quando* $kp > N$.

Vamos também utilizar a seguinte propriedade do operador de Nemytskii associado a f (e.g. de Figueiredo [9], Th.2.3):

B.2 - TEOREMA. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, e f uma função de Carathéodory definida em $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Suponhamos que existam $c > 0$, $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ e $r > 0$ tais que*

$$|f(x,t)| \leq c|s|^r + b(x).$$

Então a aplicação $\mathcal{N}_f : L^{qr}(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\mathcal{N}_f(u)(x) = f(x, u(x))$, é contínua.

Utilizaremos ainda os seguintes teoremas de regularidade:

B.3 - TEOREMA. (Agmon [2], Th.8.2) *Suponhamos que $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{B.3}$$

Então $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

B.4 - TEOREMA. (Gilbarg & Trudinger [10], Th.6.14) *Seja $0 < \alpha \leq 1$ e suponhamos que $u \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$ seja uma solução fraca de* (B.3) *com $h \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

A seguir, utilizaremos os resultados acima e um argumento iterativo conhecido como *bootstrapping* para demonstrar o

B.5 - TEOREMA. *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca de* (B.1). *Então u é uma solução clássica de* (B.1), *i.e., $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Teorema B.1(i), $u \in L^p(\Omega)$, onde $p = \frac{2N}{N-2}$.

Defimos

$$h(x) = f(x, u(x)).$$

Pelo Teorema B.2, temos que $h \in L^s(\Omega)$, onde $s = \frac{p}{\sigma}$. Vamos, a seguir, mostrar que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, para algum r tal que $2r > N$. Se $2s > N$, basta tomar $r = s$. De fato, u é solução fraca do problema linear elíptico não-homogêneo (B.3). Logo, aplicando o Teorema B.3, temos que $u \in W^{2,r}(\Omega)$.

Suponhamos agora que $2s < N$. Uma vez que $0 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, existe um único $\epsilon > 0$ tal que

$$s = (1+\epsilon)\frac{2N}{N+2}.$$

Como no caso anterior, usaremos o Teorema B.3 para concluir que $u \in W^{2,s}(\Omega)$. Utilizando o Teorema B.1(i), temos que que $u \in L^{p_1}(\Omega)$, sendo $p_1 = \frac{Ns}{N-2s}$. Portanto, $h(x) \in L^{s_1}(\Omega)$ para $s_1 = \frac{p_1}{\sigma}$ e então, pelo Teorema B.3, $u \in W^{2,s_1}(\Omega)$. Para vermos que u tem regularidade maior, basta observarmos que

$$\frac{s_1}{s} = \frac{p_1}{p} = \frac{Ns}{(N-2s)}\frac{(N-2)}{2N} = \frac{(1+\epsilon)(N-2)}{N-2-4\epsilon} > 1+\epsilon.$$

Podemos repetir este último argumento (conhecido como *bootstrapping*) um número finito de vezes para mostrar que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, para algum $2r \geq N$.

Para o caso $2s = N$, como $h \in L^s(\Omega)$, temos que $h \in L^q(\Omega)$ para algum $q < s$ tal que $(1+\epsilon)q > s$. Aplicamos o argumento *bootstrapping* mais uma vez para concluir que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, com $2r > N$.

Portanto, podemos aplicar o Teorema B.1(ii) para mostrar que $u \in C^\lambda(\overline{\Omega})$, com $0 < \lambda < 1$. Assim, $h(x) = f(x, u(x))$ é de classe $C^\lambda(\overline{\Omega})$. Aplicamos, então o Teorema B.4 para concluir que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Logo, u é uma solução clássica do problema (B.1). □

GRE
REPORTED
SCORE ON SUBJECT TEST

Bibliografia

930, 83% below
13% above

BREES

1. R. A. Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

2. S. Agmon: *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), pp.405-448.

3. S. Ahmad, A. C. Lazer & J. L. Paul: *Elementary Critical Point Theory and Perturbations of Elliptic Boundary Value Problems at Resonance*, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), pp.933-944.

4. P. Bartolo, V. Benci & D. Fortunato: *Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems with "Strong" Resonance at Infinity*, Nonlinear Anal., TMA 7 (1983), pp.981-1012.

5. H. Berestycki & D. G. de Figueiredo: *Double Resonance and Semilinear Elliptic Problems*, Comm. Partial Diff. Eq. 6 (1981), pp.91-120.

6. G. Cerami: *Un Criterio di Esistenza per i Punti Critici su Varietà Illimitate*, Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett. 112 (1978), pp.332-336.

7. D. G. Costa & A. S. Oliveira: *Existence of Solution for a Class of Semilinear Elliptic Problems at Double Resonance*, Bol. Soc. Bras. Mat. 19 (1988), pp.21-37.

8. D. G. Costa & C. A. Magalhães: *Variational Elliptic Problems which are Nonquadratic at Infinity*, preprint, 1991 (to appear in Nonlinear Anal., TMA).

9. D. G. de Figueiredo: *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute Lectures on Mathematics, Springer-Verlag, 1989.

10. D. Gilbarg & N. S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edition, Springer-Verlag, 1983.

11. J. V. A. Gonçalves, J. C. N. de Pádua & P. C. Carrião: *Variational Elliptic Problems at Double Resonance*, preprint, 1994 (to appear in Diff. and Integral Eq.).

12. **J. L. Kelley:** *General Topology*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1960.

13. **E. M. Landesman & A. C. Lazer:** *Nonlinear Pertubations of Linear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance*, J. Math. Mech. 19 (1970), pp.609-623.

14. **P. O. Omari & F. Zanolin:** *Resonance at Two Consecutive Eigenvalues for Semilinear Elliptic Equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) CLXIII (1993), pp.181-198.

15. **P. H. Rabinowitz:** *Some Minimax Theorems and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations*, Nonlinear Analysis (edited by Cesari, Kannan and Weinberger), Academic Press, New York, 1978, pp.161-177.

16. **P. H. Rabinowitz:** *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 65, American Mathematical Society, 1986.

17. **M. Schechter:** *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems at Strong Resonance*, Amer. J. Math. 112 (1990), pp.439-460.

18. **M. Schechter:** *A Bounded Mountain Pass Lemma without the (PS)-Condition and Applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 331 (1992), pp.681-703.

19. **M. Schechter:** *A Generalization of the Saddle Point Methods with Applications*, Ann. Pol. Math. 331 (1992), no.3, pp.681-703.

20. **M. Schechter:** *Strong Resonance Problems for Elliptic Semilinear Boundary Value Problems*, preprint, 1991.

21. **E. A. Silva:** *Linking Theorems and Applications to Semilinear Elliptic Problems at Resonance*, Nonlinear Anal., TMA 16 (1991), pp.455-477.

22. **J. Smoller:** *Schock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1983.

23. **A. Zumpano:** *O Teorema de A. H. Stone*, Matemática Universitária 16 (1994), pp.67-69.