

Teoria Geométrica dos Pontos Críticos

Leopoldo Grajeda

*1º. Workshop em
Análise Não-Linear
e EDPs*

UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

TEORIA GEOMÉTRICA
DOS
PONTOS CRÍTICOS

Leopoldo Grajeda
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

1º. Workshop em Análise Não-Linear e EDPs

LEOPOLDO GRAJEDA

Departamento de Matemática

Universidade Federal de Minas Gerais

Av. Pres. Antônio Carlos, 6.627 - Pampulha

Caixa Postal 702

30123-970 Belo Horizonte, MG - Brasil

Website: www.mat.ufmg.br/~leopoldo

COPYRIGHT © 2002 by L. Grajeda

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida, por qualquer processo, sem a expressa permissão do autor.

1º. Workshop em Análise Não-Linear e EDPs

Departamento de Matemática

Universidade Federal de Minas Gerais

Comitê Organizador: Leopoldo Grajeda (UFMG)

Marcos Montenegro (UFMG)

Rodney Biezuner (UFMG)

Apoio: CAPES - CNPq

Prefácio

Este livro foi escrito para servir como ponto de referência para o minicurso *Teoria Geométrica dos Pontos Críticos*, apresentado no 1^o. *Workshop em Análise Não-Linear e EDPs*, realizado no Departamento de Matemática da UFMG de 25 a 27 de fevereiro de 2002, destinado a alunos de mestrado, mas acessível a alunos de graduação.

A idéia central é fazer uma rápida introdução aos Métodos Variacionais modernos, com forte ênfase na interpretação geométrica dos resultados apresentados, mas sem abrir mão do devido rigor matemático. Por uma questão de brevidade, algumas demonstrações são deixadas para os apêndices ou simplesmente omitidas, com referências amigáveis sugeridas.

No Capítulo 1, apresenta-se uma introdução histórica ao Cálculo das Variações clássico, com destaque para o Princípio de Dirichlet, que é apresentado como exemplo de aplicação dos métodos do Cálculo das Variações. A crítica de Weierstrass ao Princípio de Dirichlet ilustra então os problemas que levaram ao desenvolvimento da teoria moderna.

No Capítulo 2, tendo como motivação a prova da existência de solução para o problema de Dirichlet, são estudados os espaços de funções. O conceito de solução fraca é introduzido e o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ surge como o ambiente natural para a aplicação dos métodos variacionais ao problema de Dirichlet.

No Capítulo 3, aborda-se o método variacional direto, com destaque para a formulação fraca do Princípio de Dirichlet. O problema da minimização da energia é então atacado, após uma discussão geométrica do problema da minimização para funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} . Prova-se a existência de solução fraca para o Problema de Dirichlet (a questão da regularidade é deixada para o Apêndice A).

No Capítulo 4, estudam-se os métodos do tipo *minimax*, especialmente o Teorema do Passo da Montanha. Assim como no Capítulo 3, a situação geométrica do problema para funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} é analisada para motivar o desenvolvimento dos métodos do tipo *minimax* que, a partir da condição de Palais-Smale e do Lema da Deformação, culminaram com o famoso Teorema do Passo da Montanha.

No Epílogo, apresenta-se o conceito de *linking*, indicando algumas referências para estudos mais aprofundados.

No Apêndice A, são fornecidos resultados de regularidade, com ênfase para a técnica conhecida como *bootstrapping*.

No Apêndice B, são fornecidos os códigos utilizados para gerar as ilustrações deste livro no programa *Mathematica*[®]. Assim, o leitor interessado pode manipular os gráficos, por exemplo alterando os diversos parâmetros.

Gostaria de registrar meus agradecimentos aos professores Marcos Montenegro e Rodney Biezuner, membros do comitê organizador do 1^o. *Workshop em Análise Não-Linear e EDPs*, pelo incentivo à realização do minicurso, além das críticas e sugestões na elaboração deste livro.

Um agradecimento especial ao professor Gastão de Almeida Braga e aos demais membros do Colegiado do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, por tornar possível a realização deste evento. Sou grato também ao Prof. Alberto Sarmiento, coordenador do Programa de Verão do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, por sua colaboração. Destaco o fundamental apoio dos órgãos de fomento, principalmente da CAPES, do CNPq e da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFMG.

Este livro foi escrito em \LaTeX através do editor *Textures*[®] 2.1, da Blue Sky Research. As ilustrações foram geradas utilizando o programa *Mathematica*[®] 4.0, da Wolfram Research. O processamento das imagens foi feito com o *Photoshop*[™] 3.0 e a composição da capa, com o *Illustrator*[™] 6.0, ambos da Adobe Systems. Todos os trabalhos de editoração foram realizados em ambiente MacOS 9.0.4.

L. Grajeda
Belo Horizonte, 22 de fevereiro de 2002.

Índice

Prefácio	<i>i</i>
Índice	<i>iii</i>
Capítulo 1 - Introdução aos Métodos Variacionais	
1.1 - O Cálculo das Variações	<i>1</i>
1.2 - O Princípio da Ação Mínima	<i>3</i>
1.3 - O Princípio de Dirichlet	<i>5</i>
1.4 - Do Clássico ao Moderno	<i>8</i>
1.5 - O Método Variacional	<i>10</i>
Capítulo 2 - Espaços de Funções	
2.1 - Introdução	<i>11</i>
2.2 - Derivadas Fracas	<i>13</i>
2.3 - Espaços de Sobolev	<i>14</i>
Capítulo 3 - O Método Variacional Direto	
3.1 - A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet	<i>16</i>
3.2 - O Caso de \mathbb{R}^2	<i>18</i>
3.3 - O Problema da Compacidade	<i>20</i>
3.4 - Semicontinuidade Inferior	<i>21</i>
3.5 - A Desigualdade de Poincaré	<i>23</i>
3.6 - A Solução Fraca do Problema de Dirichlet	<i>24</i>

Capítulo 4 - O Teorema do Passo da Montanha	
4.1 - Os Métodos <i>Minimax</i>	25
4.2 - A Geometria do Passo da Montanha	27
4.3 - A Condição de Palais-Smale	32
4.4 - O Lema da Deformação	33
4.5 - A Prova do Teorema do Passo da Montanha	36
Epílogo	37
Apêndice A - Regularidade das Soluções Fracas Obtidas	39
Apêndice B - Código <i>Mathematica</i> [®] dos Gráficos	41
Bibliografia	44

Capítulo 1

Introdução aos Métodos Variacionais

1.1 O Cálculo das Variações

O primeiro indício histórico de formulação de um princípio variacional deve-se a Heron de Alexandria (c. 125 a.C.), que postulou que a luz segue sempre o caminho mais curto entre dois pontos e estabeleceu as leis para a reflexão da luz em espelhos. A idéia central de seu trabalho *Catóptrica* é de que a luz minimiza a distância percorrida entre a fonte e o observador. Essa teria sido a primeira tentativa de se explicar fenômenos físicos através do princípio de que existe na natureza alguma quantidade (no caso a distância) a ser minimizada.

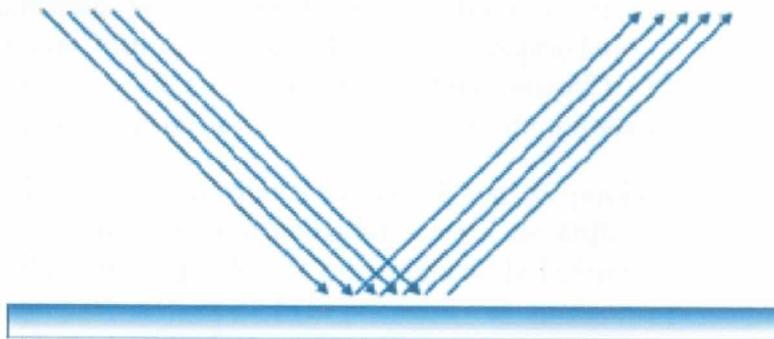


FIGURA 1 - A reflexão da luz em um espelho plano.

Mas foi somente na primeira metade do século XVII que se pode dizer que um princípio variacional foi de fato utilizado, quando Pierre de Fermat postulou que, em seu trajeto, a luz minimizaria o tempo transcorrido ao invés da distância percorrida e, a partir deste princípio, deduziu matematicamente as leis que descrevem o fenômeno da refração da luz, obtidas experimentalmente pelo holandês Willebrod Snell poucos anos antes.

Apesar do sucesso de Fermat no estudo da refração da luz, ainda não havia sido estabelecida toda a maquinaria matemática necessária para abordar problemas variacionais mais complexos. Contudo, o advento do Cálculo na segunda metade do século XVII abriu o caminho para o pleno desenvolvimento da teoria clássica do Cálculo das Variações.

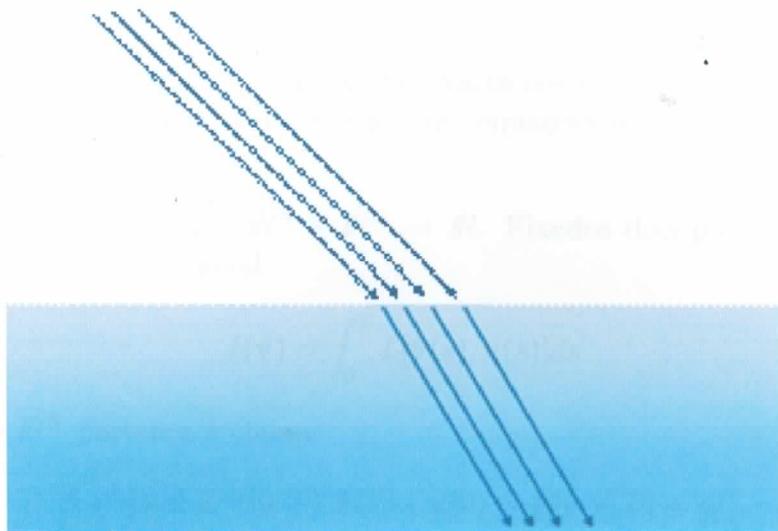


FIGURA 2 - A refração da luz ao mudar de meio.

Apenas em 1743 que surgiu o primeiro tratado sobre o Cálculo das Variações. Naquele ano, o suíço Leonhard Euler submeteu ao editor o seu famoso livro *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes Sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Senso Accepti* (que poderia ser traduzido como “Método para Encontrar Curvas que Minimizam ao Máximo a Propriedade da Folga ou Soluções para Problemas Isoperimétricos Aceitas no Sentido Amplíssimo”). Este livro foi um marco na história da Matemática e inspirou inúmeras gerações de matemáticos ao longo dos séculos.

Em 1744, mesmo ano em que o livro de Euler foi publicado, o francês Pierre-Louis Maupertius publicou seu aclamado trabalho *Accord de Différentes Lois de la Nature que Avaient Jusqu'ici Paru Incompatibles* (Concordância de Diferentes Leis da Natureza que até aqui Pareciam Incompatíveis), onde pela primeira vez aparece o princípio da ação mínima. Entretanto, ao que tudo indica, Euler teria sido o primeiro a compreender realmente toda a relevância deste princípio.

Após os trabalhos pioneiros de Euler e Maupertius na primeira metade do século XVIII, grandes matemáticos, como Louis de Lagrange, Adrien-Marie Le Gendre, Karl Jacobi e William Rowan Hamilton contribuíram decisivamente para consolidar o Cálculo das Variações.

1.2 O Princípio da Ação Mínima

Uma aplicação clássica do Cálculo das Variações é a resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias (conhecidas como equações de Euler-Lagrange) através da minimização do funcional da ação.

Considere uma função $L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Fixados dois pontos $P, Q \in \mathbb{R}^N$ e um tempo $T > 0$, definimos o funcional

$$I(\mathbf{v}) = \int_0^T L[\dot{\mathbf{v}}(s), \mathbf{v}(s)] ds$$

onde $\mathbf{v} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ pertence à classe

$$A = \{\mathbf{v} \in C^2([0, T], \mathbb{R}^N) \mid \mathbf{v}(0) = P \text{ e } \mathbf{v}(T) = Q\}.$$

A função L é chamada de langrangiana e o funcional I , de ação.

Note que A nada mais é que o conjunto das curvas de classe C^2 em \mathbb{R}^N que ligam P a Q , quando t varia de 0 a T . Vale lembrar que, se uma curva de classe C^2 em \mathbb{R}^N liga P a Q em tempo finito, então pode-se reparametrizá-la como uma curva de A .

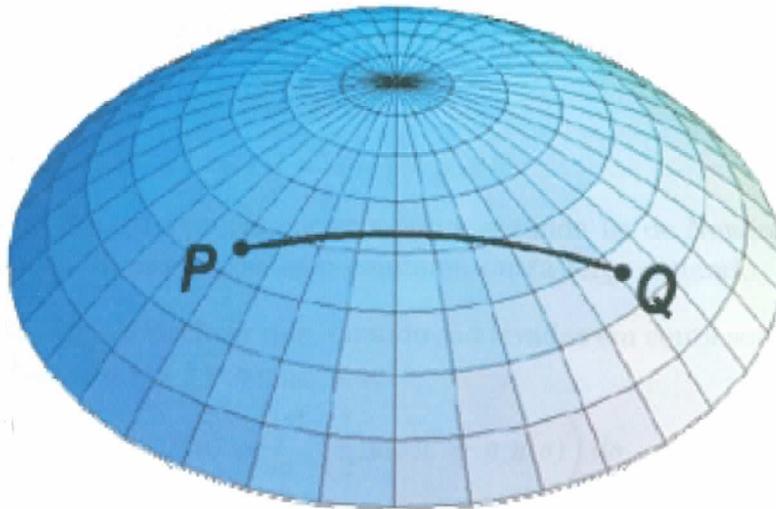


FIGURA 3 - A ação pode ser definida também para curvas em variedades.

A idéia central do Cálculo das Variações é que, se $\mathbf{x} \in A$ minimiza a ação, i.e., se

$$I(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{v} \in A} I(\mathbf{v})$$

então \mathbf{x} é solução do sistema de equações de Euler-Lagrange

$$-\frac{d}{ds} \nabla_x L[\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)] + \nabla_y L[\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)] = 0$$

onde $0 \leq s \leq T$ e usamos a notação $L = L(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Assim, para provar a existência de solução para o sistema de equações de Euler-Lagrange, basta provar a existência de um ponto de mínimo absoluto para a ação. De fato, outras soluções podem corresponder a outros pontos críticos que não um mínimo absoluto, tais como pontos de sela ou pontos de mínimo local.

Um exemplo de ação é o comprimento de uma curva parametrizada $\mathbf{x}(t)$ tal que $\mathbf{x}(0) = P$ e $\mathbf{x}(T) = Q$, que é dado por

$$l(\mathbf{x}) = \int_0^T \sqrt{1 + |\dot{\mathbf{x}}(s)|^2} ds = \int_0^T L[\dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s)] ds$$

para a função lagrangiana

$$L(x, y) = \sqrt{1 + |x|^2}.$$

Outro exemplo simples de função lagrangiana é dado pelo princípio da ação mínima de Hamilton, onde L corresponde à diferença entre energia cinética e energia potencial. No caso de uma partícula em movimento retilíneo vertical, próxima à superfície da Terra, temos

$$L(x, y) = \frac{1}{2}|x|^2 - g.y$$

onde g é a aceleração da gravidade e y e x correspondem, respectivamente, à altura e à velocidade vertical da partícula. Então $x(s) = \dot{y}(s)$ e a equação de Euler-Lagrange correspondente é

$$-\frac{d}{ds} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} [\dot{y}(s), y(s)] \right\} + \frac{\partial L}{\partial y} [y(s), y(s)] = 0$$

ou seja,

$$-\frac{d}{ds} \dot{y}(s) - g = 0.$$

Assim, a equação de Euler-Lagrange corresponde à segunda lei de Newton, com a partícula sujeita somente à ação da gravidade, sem nenhuma outra força atuando.

Por sua vez, pode-se verificar que, quando são levadas em conta somente as trajetórias que fixam $y(0) = h_{inicial}$ e $y(T) = h_{final}$, a ação

$$I(y) = \int_0^T \left(\frac{1}{2} |\dot{y}(s)|^2 - g y(s) \right) ds$$

será mínima para

$$y(t) = y(0) + \left(\frac{h_{final} - h_{inicial}}{T} - \frac{1}{2}gT \right) t + \frac{1}{2}gt^2$$

que é a solução da equação de Euler-Lagrange dentre as trajetórias admissíveis.

Neste exemplo unidimensional, porém, é muito mais difícil minimizar a ação do que resolver a equação de Euler-Lagrange. A situação é dramaticamente diferente quando se passa para dimensões maiores (ou para dimensão infinita) e o sistema de equações de Euler-Lagrange pode tornar-se extremamente complicado. A grande vantagem de se usar a ação é que não é preciso encontrar explicitamente a função minimante, mas apenas obter (e verificar) condições que garantam a existência de tal função.

1.3 O Princípio de Dirichlet

O alemão Johann Dirichlet aplicou o Cálculo das Variações à equação de Laplace, mostrando que soluções da equação de Poisson podem ser caracterizadas como minimantes da energia. Mais especificamente, ele estudou o problema de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $f \in C^0(\bar{\Omega})$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto limitado com $\partial\Omega$ de classe C^1 .

Usando o princípio do máximo, pode-se facilmente mostrar que (1.1) possui no máximo uma solução de classe $C^2(\bar{\Omega})$. Para provar a existência da solução para (1.1), porém, o trabalho é mais árduo.

Dirichlet demonstrou que a solução de (1.1) corresponde ao ponto de mínimo absoluto do funcional

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx \quad (1.2)$$

definido sobre a classe de funções

$$A = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u = 0, \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Este é o famoso Princípio de Dirichlet:

1.1 - TEOREMA (PRINCÍPIO DE DIRICHLET): *Uma função $u \in C^2(\bar{\Omega})$ é solução de (1.1) se, e somente se, u um ponto de mínimo absoluto de (1.2).*

DEMONSTRAÇÃO: Se $u \in C^2(\bar{\Omega})$ é solução de (1.1), a condição de fronteira implica automaticamente que $u \in A$. Dado $v \in A$, a equação diferencial em (1.1) implica que

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)[u(x) - v(x)] dx = \int_{\Omega} f(x)[u(x) - v(x)] dx.$$

Integrando por partes o primeiro membro (e usando que $u = v$ sobre $\partial\Omega$), tem-se que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla [u(x) - v(x)] dx = \int_{\Omega} f(x)[u(x) - v(x)] dx,$$

donde

$$\int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla u(x) - f(x)u(x)] dx = \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)] dx.$$

Mas, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)| \leq |\nabla u(x)| \cdot |\nabla v(x)| \leq \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2$$

e, por conseguinte,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 - f(x)u(x)) dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)v(x) \right) dx.$$

Portanto, pela definição (1.2),

$$I(u) \leq I(v)$$

Como $v \in A$ é arbitrário e $u \in A$, u é um ponto de mínimo absoluto de I .

Por outro lado, seja $u \in A$ um ponto de mínimo absoluto de I . Para qualquer $v \in C_0^\infty(\Omega)$ fixado, considere a função real definida por

$$i(\lambda) = I(u + \lambda v)$$

Como $u + \lambda v \in A$, se i for derivável em $\lambda = 0$, deve-se ter $i'(0) = 0$. Contudo,

$$\begin{aligned} i(\lambda) &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x) + \lambda \nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + \lambda \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + \frac{\lambda^2}{2} |\nabla v(x)|^2 - f(x)[u(x) + \lambda v(x)] \right) dx. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} [\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) - f(x)v(x)] dx = \int_{\Omega} [-\Delta u(x) - f(x)]v(x) dx.$$

Uma vez que esta identidade é válida para qualquer $v \in C_0^\infty(\Omega)$, devemos ter $-\Delta u = f$ em Ω . Como $u \in A$, a condição de fronteira é automaticamente satisfeita e u é solução de (1.1). \square

No caso da equação de Laplace, por exemplo, $f \equiv 0$ e I é limitado inferiormente por 0. Portanto,

$$\inf_{u \in A} I(u) \geq 0$$

e parece certa a existência de uma função minimante (i.e., de uma função $u \in A$ onde I atinge o seu mínimo). Entretanto, a simples limitação inferior não é suficiente para garantir a existência de pontos de mínimo do funcional I em A . Mesmo para funções reais isto não é verdade – a função exponencial, por exemplo, é limitada inferiormente, mas não possui ponto de mínimo. É preciso, portanto, obter condições que efetivamente garantam a existência do ponto de mínimo (isso será feito no Capítulo 3).

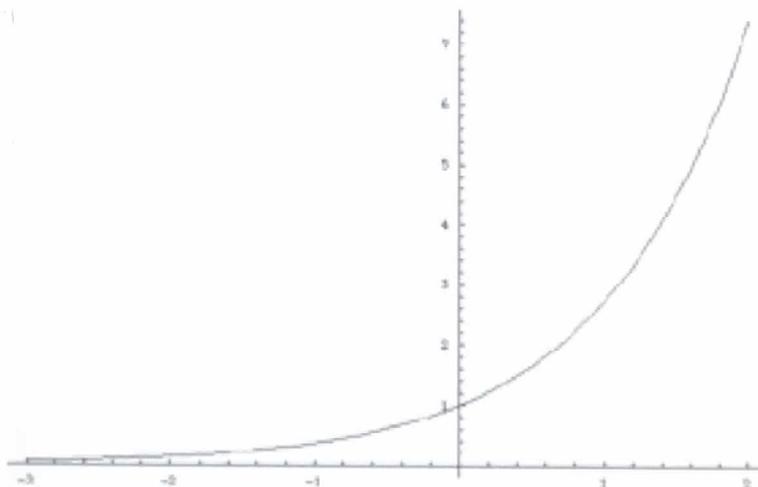


FIGURA 4 - A função exponencial é limitada inferiormente mas não assume o seu ínfimo.

1.1 Funcionais como (1.2) são conhecidos como energia e podem ser usados de diversas formas, como, por exemplo, para provar a unicidade da solução de (1.1) – ao invés do princípio do máximo – ou ainda para obter as chamadas estimativas *a priori*. O uso de tais funcionais na teoria das Equações Diferenciais Parciais é genericamente chamado de métodos de energia.

1.4 Do Clássico ao Moderno

No final do século XIX, com o estabelecimento de bases rigorosas para o Cálculo através da consolidação da Análise Matemática, os fundamentos e métodos do Cálculo das Variações foram postos em xeque. O alemão Karl Weierstrass, por exemplo, fez críticas duras ao Princípio de Dirichlet, principalmente no que diz respeito à falta de rigor no tratamento da questão da existência de soluções.

Até então, as aplicações do Cálculo das Variações eram desenvolvidas sem o necessário rigor matemático. A existência de minimantes para funcionais limitados inferiormente, por exemplo, era tida como certa. Em muitos casos, o simples fato de as equações estudadas serem oriundas de modelos da Física era considerado prova mais do que suficiente da existência de soluções. Afinal de contas, a carga elétrica distribuiu-se na superfície de um condutor em equilíbrio de alguma forma, de modo que a equação que descreve esse fenômeno matematicamente (equação de Laplace) deve obrigatoriamente ter solução.

Mas Weierstrass produziu um contra-exemplo de problema variacional que não admite solução minimal, apesar de o funcional em questão ser limitado inferiormente. Ele considerou o funcional $I : A \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_{-1}^1 \left| x \frac{du}{dx} \right|^2 dx$$

sendo

$$A = \{u \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}) \mid u(-1) = -1 \text{ e } u(1) = 1\}.$$

Claramente, como $I(u) > 0$ para todo $u \in A$, I é limitado inferiormente por 0. Todavia, I não assume o seu ínfimo em A . Para ver isso, considere a seqüência de funções

$$u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)} \in A. \quad (1.3)$$

Pode-se calcular explicitamente

$$\begin{aligned} I(u_n) &= \int_{-1}^1 \left| x \frac{du_n}{dx} \right|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left| x \frac{n}{[1 + (nx)^2] \arctan(n)} \right|^2 dx \end{aligned}$$

e, fazendo $t = nx$,

$$I(u_n) = \frac{1}{n \arctan^2(n)} \int_{-n}^n \frac{t^2}{[1 + t^2]^2} dt \leq \frac{1}{n \arctan^2(n)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{[1 + t^2]^2} dt$$

Assim, uma vez que $I(u_n) > 0$ para todo n , tem-se que $I(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, de modo que o ínfimo do funcional I sobre A é de fato 0. Logo, o ínfimo de I sobre A não é atingido.

Neste exemplo, o que ocorre é que as funções u_n , mesmo sendo todas de classe C^∞ , convergem ponto a ponto para a função $\text{sinal}(x)$, que é definida por

$$\text{sinal}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

sendo, portanto, descontínua e não pertencendo ao conjunto A das funções admissíveis.

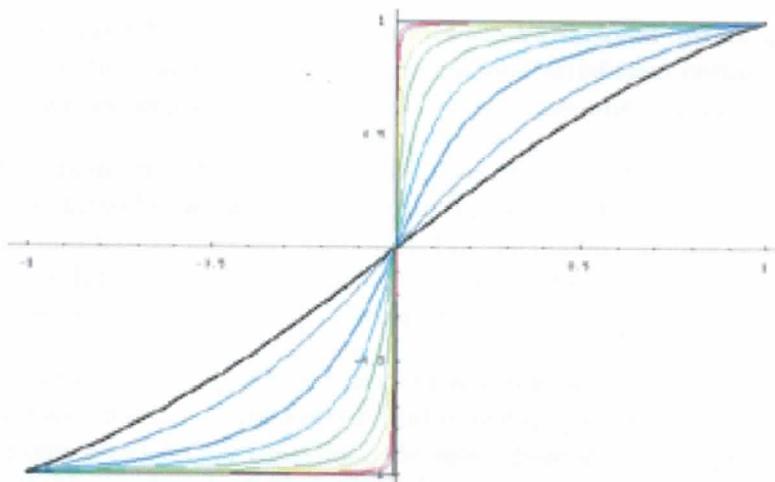


FIGURA 5 - As funções u_n convergem para a função $\text{sinal}(x)$.

Isso foi um choque para a teoria do Cálculo das Variações, que mergulhou então em uma severa *Grundlagenkrise* (crise de fundamentos). Era preciso rever cuidadosamente os fundamentos da teoria e estabelecer bases rigorosas para o Cálculo das Variações. Por exemplo, necessitava-se compreender melhor o contra-exemplo de Weierstrass para se saber ao certo sob quais condições pode-se garantir que um funcional limitado inferiormente atinge o seu mínimo.

1.5 O Método Variacional

Trabalhos de matemáticos como Weierstrass, Arzela, Fréchet, Hilbert e Lebesgue estabeleceram bases rigorosas para o Princípio de Dirichlet e levaram ao desenvolvimento da Análise Funcional e da moderna teoria das Equações Diferenciais Parciais.

A idéia fundamental de associar a existência de soluções à existência de pontos críticos de um funcional permanecia inabalada, mas percebeu-se rapidamente que a dimensão infinita dos espaços de funções tornava esta tarefa mais difícil. Em um primeiro momento, concentraram-se os esforços na busca de pontos de mínimo para funcionais limitados inferiormente.

No início do século XX, foi consolidado o Método Variacional direto, que permite provar a existência de pontos de mínimo absoluto de funcionais que satisfazem certas condições específicas (por exemplo, um funcional lagrangiano coercivo e convexo assume o seu mínimo).

Os trabalhos pioneiros de Ljusternik-Schnirelman na primeira metade do século XX deixaram claro que o método variacional funciona também se forem encontrados outros pontos críticos que não um mínimo ou máximo absoluto. Em particular, muitos problemas resultam em funcionais que não são limitados nem inferiormente, nem superiormente. A procura de extremos locais ou de pontos de sela, contudo, é uma tarefa árdua.

Na segunda metade do século XX, deram frutos as idéias de Ljusternik-Schnirelman, através dos trabalhos de Palais, Smale, Ambrosetti e Rabinowitz, que desenvolveram métodos do tipo *minimax* que garantem a existência de pontos de sela. Esse é o caso, por exemplo, do famoso Teorema do Passo da Montanha, de Ambrosetti e Rabinowitz.

Por volta de 1980, Rabinowitz, Benci e Ni introduziram um método para provar a existência de pontos críticos com base em características geométricas e topológicas dos funcionais, atualmente conhecido como *linking*. As idéias de *linking* foram fortemente inspiradas na teoria de Morse (dos anos 1950), que relaciona a existência e o número de pontos críticos de funções suaves de um espaço topológico M em \mathbb{R} com a topologia de M .

Capítulo 2

Espaços de Funções

2.1 Introdução

Como foi visto no Capítulo 1, a essência do Cálculo das Variações é o estudo de funcionais como a ação e a energia. Estes funcionais associam a cada função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ um número real – a grosso modo, eles são “funções de funções”. O ideal seria que se pudesse utilizar para os funcionais todo o instrumental do Cálculo, como, por exemplo, derivadas direcionais (mais ou menos como foi feito na demonstração do Teorema 1.1). Para tanto, é preciso primeiro conhecer a estrutura do espaço das funções (por exemplo, funções podem ou não ser tratadas como pontos de \mathbb{R}^N ?).

Dadas $u, v : \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, sabe-se que $u + v$ e αu são também funções de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R} , de modo que o espaço das funções de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R} é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . O problema é que este espaço tem dimensão infinita! Para ver isso, basta notar que o conjunto

$$\{1, x_1, x_1^2, x_1^3, x_1^4, x_1^5, \dots\}$$

de polinômios na variável x_1 é linearmente independente, de forma que o espaço das funções de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R} não pode ter dimensão finita (mesmo quando $n = 1$). Assim, os resultados conhecidos do Cálculo não podem ser aplicados, sendo preciso rever cuidadosamente a teoria e verificar quais resultados podem ser estendidos ou adaptados e quais simplesmente não são verdadeiros quando tratamos de espaços de dimensão infinita. Este é o objetivo principal do ramo da Matemática conhecido como Análise Funcional.

A questão da dimensão é apenas um dos problemas de se trabalhar com espaços de funções. Há também um outro: como medir a distância entre duas funções? Ao contrário de \mathbb{R}^N , onde temos uma noção de distância euclidiana, não existe uma definição natural de distância entre funções. É claro que, assim como em \mathbb{R}^N , diferentes métricas podem induzir topologias diferentes no espaço. Isso pode alterar dramaticamente algumas situações, como será visto mais adiante.

Trabalhar com o espaço de todas as funções de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R} é uma tarefa bastante complicada. Uma técnica tradicional é considerar somente o espaço das funções de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R} “relevantes” ao problema a ser abordado. Por exemplo, para tratar o Problema de Dirichlet (1.1), seria razoável considerar somente as funções de classe C^2 , para as quais o laplaciano pode ser calculado e é contínuo e para as quais é possível calcular a energia (1.2).

Uma vez definido o espaço de funções em que se deseja trabalhar, é preciso, então, definir uma noção de distância entre as funções deste espaço ou, melhor ainda, escolher uma norma para este espaço. Vale ressaltar que uma norma $\|\cdot\|$ é uma aplicação que associa a cada função um número real não-negativo de tal modo que:

- (i) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para quaisquer funções u e v ;
- (ii) $\|\alpha u\| \leq |\alpha| \cdot \|u\|$ para qualquer função u e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\|u\| = 0 \iff u \equiv 0$.

Pode-se, então, definir a distância entre duas funções u e v por $\|v - u\|$. A condição (i) garante a validade da desigualdade triangular, enquanto a condição (iii) assegura que duas funções são idênticas se, e somente se, a distância entre elas for nula. A condição (ii) de certa forma impede que tenhamos métricas “patológicas”, tais como a métrica zero-um.

Para funções contínuas em $\bar{\Omega}$, por exemplo, podemos definir a norma

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$$

As condições (i), (ii) e (iii) podem ser facilmente verificadas.

Entretanto, a norma acima não é adequada para tratar problemas no espaço $C^2(\bar{\Omega})$ das funções de classe C^2 definidas em $\bar{\Omega}$. O motivo é que $C^2(\bar{\Omega})$ com esta norma não é um espaço completo, ou seja, pode-se obter uma seqüência $(u_n) \subset C^2(\bar{\Omega})$ com $u_n \rightarrow u \notin C^2(\bar{\Omega})$. Por exemplo, a seqüência

$$u_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

está em $C^2([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}])$, mas é fácil verificar que u_n converge na norma $\|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}$ para uma função que não é de classe C^2 .

Uma vez que se deseja trabalhar com um espaço de funções que seja normado e completo (i.e. que seja um espaço de Banach), é preciso encontrar uma norma mais adequada para $C^2(\bar{\Omega})$. Pode-se também considerar a possibilidade de trabalhar com algum subespaço de $C^2(\bar{\Omega})$ que seja completo ou com algum espaço de Banach que contenha $C^2(\bar{\Omega})$.

Uma possibilidade interessante foi explorada por Hölder, que encontrou subespaços de $C^k(\bar{\Omega})$ nos quais é possível definir uma nova norma que leva em conta também as normas das derivadas de ordem até k , além de uma espécie de “constante” de Lipschitz para cada derivada de ordem k . São os chamados espaços de Hölder, usualmente denotados por $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$. Para a teoria clássica dos espaços de Hölder, veja Gilbarg & Trudinger [7].

Outra possibilidade – encontrar um espaço de Banach apropriado que contenha $C^2(\bar{\Omega})$ – será explorada nas próximas seções.

2.2 Derivadas Fracas

Tendo em mente que se quer provar a existência de uma solução para o Problema de Dirichlet (1.1), procura-se um espaço de Banach que contenha $C^2(\bar{\Omega})$ e, além disso, para o qual o Princípio de Dirichlet mantenha-se válido. Se for possível encontrar tal espaço, toda a maquinaria da Análise Funcional poderá ser utilizada para encontrar uma função minimante da energia (1.2) e, por conseguinte, uma solução para (1.1).

Ao examinar cuidadosamente a demonstração do Teorema 1.1, percebe-se que o fato crucial foi a integração por partes

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)[u(x) - v(x)] dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla [u(x) - v(x)] dx.$$

Assim, um problema envolvendo o laplaciano (derivadas de segunda ordem) passou a ser um problema envolvendo apenas o gradiente (derivadas de primeira ordem). Afinal de contas, a energia (1.2) leva em conta somente o gradiente.

Em geral, se $u \in C^k(\Omega)$, quando se integra o produto de uma derivada $D^\alpha u$ (onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é um multi-índice com $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$) por uma função $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, pode-se integrar por partes sucessivamente para “passar” todas as derivadas para ϕ e obter

$$\int_{\Omega} D^\alpha u(x) \cdot \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \cdot D^\alpha \phi(x) dx$$

Note que os termos de fronteira foram aniquilados pelo fato de ϕ e todas as suas derivadas se anularem perto de $\partial\Omega$. Mais uma vez, o interessante é que o lado direito requer que u seja apenas integrável, enquanto que o lado esquerdo exige que u tenha diferenciabilidade até ordem k .

A questão é saber se, dada uma função u integrável, é possível existir alguma função v , também integrável, de tal modo que

$$\int_{\Omega} v(x) \cdot \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) \cdot D^\alpha \phi(x) dx, \text{ para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Quando $u \in C^k(\Omega)$ e $|\alpha| \leq k$, claramente a resposta é sim (basta tomar $v = D^\alpha u$). Surpreendentemente, mesmo quando u não é de classe C^k para nenhum $k \geq |\alpha|$, pode existir tal função v . Por isso, quando existe v satisfazendo a equação acima, diz-se que v é a derivada fraca de u de ordem α , que será denotada por $D^\alpha u$. Essa notação faz sentido porque a derivada fraca, quando existe, é única.

Utilizando a idéia de derivada fraca, pode-se reescrever o problema de Dirichlet (1.1) na forma

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx, & \text{para todo } v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}) \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Soluções deste problema são conhecidas como soluções fracas de (1.1).

2.3 Espaços de Sobolev

Analisando a forma fraca do problema de Dirichlet (2.1), vê-se que não há necessidade de se exigir que u seja de classe C^2 , mas apenas que as integrais em (2.1) façam sentido. Basta, portanto, que u possua derivadas fracas de primeira ordem e que estas sejam integráveis. Uma vez que se quer usar o Princípio de Dirichlet, é preciso trabalhar em um espaço onde a energia (1.2) esteja bem definida. Como a energia associada a uma função é dada por

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx + \dots + \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^2 dx - \int_{\Omega} uf dx,$$

é desejável que as derivadas fracas de primeira ordem sejam quadrado-integráveis, ou seja, pertençam ao espaço de Lebesgue $L^2(\Omega)$.

É um resultado conhecido que os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ (das funções p -integráveis definidas sobre Ω) são espaços de Banach com a norma

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sobre o espaço $L^2(\Omega)$, em especial, pode ser definido um produto interno associado à norma $\|\cdot\|_2$ através de

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx.$$

Assim, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. A estrutura adicional proporcionada pela existência de um produto interno em $L^2(\Omega)$ é muito bem vinda e, por isso, seria interessante colocar a exigência adicional de que $u \in L^2(\Omega)$ (De fato, como Ω é limitado, a desigualdade de Poincaré (Teorema 3.2) mostra que na realidade essa exigência é bastante razoável).

Isso levou à definição do espaço de funções:

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq 1\} \quad (2.2)$$

com a norma

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} = \left(\|u\|_2^2 + \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha u\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pode-se verificar que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert o com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx.$$

Ressalta-se que, na notação multi-índice, as derivadas primeiras são

$$D^{(1,0,\dots,0)}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad D^{(0,1,\dots,0)}u = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad D^{(0,0,\dots,1)}u = \frac{\partial u}{\partial x_n}.$$

O grande inconveniente de trabalhar com funções em $L^2(\Omega)$ é que a condição de fronteira em (2.1) não faz sentido. Vale lembrar que os espaços de Lebesgue são, na verdade, espaços de classes de equivalência de funções, de modo que o valor de uma função (i.e., um representante de uma classe) sobre um conjunto de medida nula (como $\partial\Omega$) não faz diferença. Pior ainda, uma função em $L^2(\Omega)$ pode nem mesmo estar definida sobre $\partial\Omega$.

No caso geral, este problema pode ser contornado utilizando o operador traço. No nosso caso específico, devido à condição de fronteira em (2.1), pode-se simplesmente considerar o espaço

$$W_0^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \cap \overline{C_0^\infty(\overline{\Omega})},$$

onde o fecho de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ é tomado com relação à norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$. Em outras palavras, $W_0^{1,2}(\Omega)$ é o conjunto das funções de $W^{1,2}(\Omega)$ que podem ser escritas como limites de funções em $C_0^\infty(\overline{\Omega})$. Uma vez que todas as funções de $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ valem zero em $\partial\Omega$, este espaço pode ser, então, interpretado como o espaço das funções de $W^{1,2}(\Omega)$ que se anulam sobre $\partial\Omega$. Claramente, $W_0^{1,2}(\Omega)$ é também um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle u, v \rangle_{W^{1,2}(\Omega)}$.

Espaços de funções como (2.2) são chamados de espaços de Sobolev. Em geral, problemas similares a (1.1) levaram à definição dos espaços de Sobolev:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq k\}$$

onde a norma é dada por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_p^p + \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pode-se também definir $W_0^{k,p}(\Omega)$ de modo similar.

Como foi visto acima, os espaços de Sobolev são o ambiente ideal para tratar problemas envolvendo derivadas parciais e desempenham um papel fundamental na moderna teoria de equações diferenciais parciais. Uma referência amigável é Evans [6]. Uma fonte completa e atualizada é Taylor [13]. As referências clássicas sobre espaços de Sobolev são Adams [1] e Gilbarg & Trudinger [7].

Capítulo 3

O Método Variacional Direto

3.1 A Forma Fraca do Princípio de Dirichlet

No Capítulo 2, o espaço de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$ foi introduzido como o ambiente ideal para tratar o problema de Dirichlet (1.1) em sua forma fraca (2.1). A energia (1.2) torna-se um funcional $I : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e o Princípio de Dirichlet torna-se:

3.1 - TEOREMA (PRINCÍPIO DE DIRICHLET): *Uma função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ é solução fraca de (1.1) (i.e. solução de (2.1)) se, e somente se, u um ponto de mínimo absoluto de (1.2).*

A demonstração é essencialmente a mesma do Teorema 1.1, com pequenas adaptações. A diferença é que agora a energia é um funcional definido sobre um espaço de Hilbert e a estrutura de $W_0^{1,2}(\Omega)$ pode ser usada. Por exemplo, pode-se falar da derivada da energia no sentido de Fréchet, dada por

$$I'(u) \cdot v = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx - \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx, \text{ para todo } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

A derivada de um funcional no sentido de Fréchet corresponde à tomada de derivadas direcionais, como foi feito na demonstração do Teorema 1.1. Note que as soluções da equação $I'(u) = 0$ correspondem a soluções de (2.1), ou seja, os pontos críticos da energia I correspondem a soluções fracas do problema de Dirichlet (1.1).

A unicidade da solução fraca do problema de Dirichlet (1.1) pode ser demonstrada da seguinte maneira: se u e \tilde{u} são soluções de (2.1), tem-se que, para todo $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla(u - \tilde{u}) \cdot \nabla v \, dx = 0.$$

Portanto, $\nabla(u - \tilde{u}) = 0$ e, conseqüentemente, $u - \tilde{u}$ é constante. Como u e $\tilde{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, resulta que $u = \tilde{u}$.

3.2 O método variacional direto visa provar a existência da solução de (2.1) através da demonstração da existência de um ponto de mínimo absoluto. Afinal de contas, o Princípio de Dirichlet garante que, se existir alguma solução de (2.1), esta será um ponto de mínimo absoluto de I . A referência definitiva sobre equações diferenciais parciais elípticas – tais como o problema de Dirichlet (1.1) – é Gilbarg & Trudinger [7].

3.2 O Caso de \mathbb{R}^2

Antes de atacar o problema de encontrar um ponto de mínimo para um funcional definido no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$, de dimensão infinita, pode ser interessante examinar um caso mais simples, como o problema análogo em \mathbb{R}^N . Para que se possa ter uma visão geométrica da situação, será estudado o caso bidimensional.

Sendo $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, é interessante obter condições sobre F que garantam a existência de um ponto de mínimo absoluto. Claramente, uma condição necessária à existência de um ponto de mínimo absoluto é a limitação inferior da função F . Entretanto, esta condição não é suficiente – por exemplo, a função

$$F(x, y) = e^{-x^2-y^2}$$

é diferenciável em todo o plano e limitada inferiormente pelo seu ínfimo 0, mas não assume este valor em ponto algum. O problema aqui é que a função decai para o seu ínfimo 0 quando $|(x, y)| \rightarrow \infty$, mas é sempre positiva.

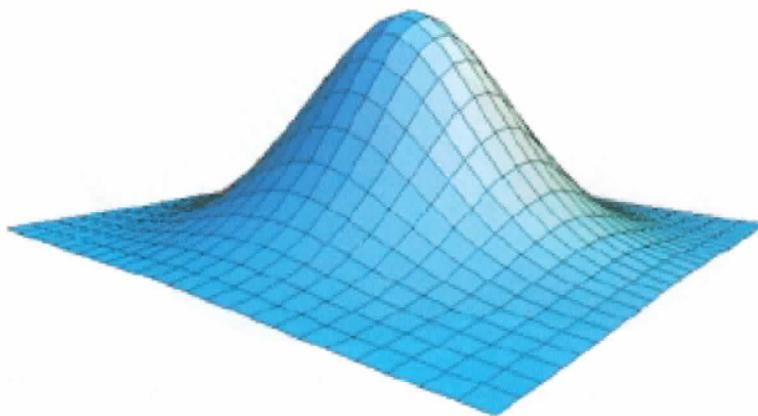


FIGURA 6 - Uma função limitada inferiormente que não assume o seu ínfimo.

Para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto, portanto, é preciso impedir de alguma forma que o ponto de mínimo “escape” como no exemplo anterior.

Se, ao contrário, houver uma seqüência $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $F(x_n, y_n) \rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} F$ e $|(x_n, y_n)| \leq M$ para algum $M \in \mathbb{R}$, então tem de existir pelo menos um ponto de mínimo absoluto de F . De fato, como esta seqüência é limitada, ela possui alguma subsequência convergente. Renomeando esta seqüência, pode-se assumir que $(x_n, y_n) \rightarrow (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Um vez que F é diferenciável (e, portanto, contínua) no ponto (a, b) , tem-se

$$F(a, b) = \lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (a, b)} F(x, y) = \inf_{\mathbb{R}^2} F$$

e (a, b) é um ponto de mínimo absoluto de F .

Assim, uma possibilidade para garantir a existência de um ponto de mínimo absoluto de F é impor, além da exigência de que F seja limitada inferiormente, alguma condição de crescimento que assegure a existência de uma seqüência minimante limitada (ou seja, uma seqüência como a do parágrafo anterior). Uma condição suficiente seria, por exemplo,

$$\lim_{|(x_n, y_n)| \rightarrow \infty} F(x, y) = \infty.$$

Neste caso, o crescimento de F impede que o ponto de mínimo “escape para o infinito”.

Por exemplo, a função

$$F(x, y) = e^{x^2+y^2} - y + \cos(2x)$$

satisfaz a condição de crescimento acima e portanto possui um ponto de mínimo absoluto.

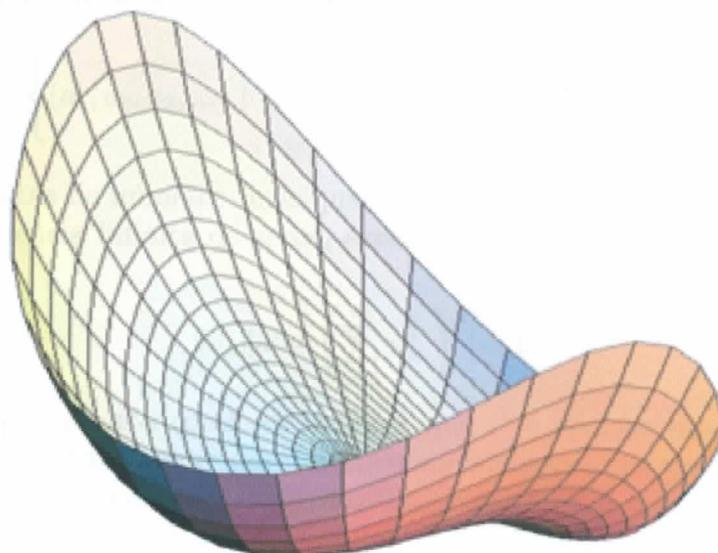


FIGURA 7 - A função $F(x, y) = e^{x^2+y^2} - y + \cos(2x)$ atinge o seu valor mínimo.

Conforme será visto mais adiante, condições de crescimento desempenham um papel muito importante também na minimização de funcionais em espaços de dimensão infinita.

3.3 O Problema da Compacidade

Infelizmente, no caso de espaços de dimensão infinita, o argumento da Seção 3.2 não é válido. Utilizou-se fundamentalmente o fato de que toda seqüência limitada em R^n possui alguma subsequência convergente para se obter a existência de um ponto de mínimo absoluto. Entretanto, em espaços de dimensão infinita, existem seqüências limitadas que não possuem nenhuma subsequência convergente!

Ocorre que em R^n qualquer bola é um conjunto compacto, enquanto que em espaços de dimensão infinita, não. Assim, ao tentar minimizar um funcional em um espaço de dimensão infinita, mesmo considerando uma seqüência minimante limitada, ainda é possível que o ponto de mínimo absoluto “escape”.

Para se ter uma idéia do que pode acontecer, considere o espaço

$$l^2 = \left\{ (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid \|(a_1, a_2, a_3, \dots)\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

das seqüências infinitas de números reais quadrado-somáveis e a seqüência $\{u_k\} \subset l^2$, onde cada u_k é uma seqüência infinita de zeros, exceto pelo k -ésimo elemento, que é igual a 1. Assim,

$$\|u_k\|_{l^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_{k_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Mas l^2 é um espaço completo (pode-se verificar que l^2 é de fato um espaço de Hilbert), de forma que seria natural esperar que (ao menos passando a uma subsequência) $u_k \rightarrow u$ para algum $u \in l^2$ com $\|u\|_{l^2} = 1$. Todavia, a seqüência $\{u_k\}$ não converge e não possui subsequência convergente.

Portanto, a topologia de um espaço de dimensão infinita é completamente diferente da topologia dos espaços de dimensão finita. Isso afeta também a noção de continuidade de um funcional (lembre-se que a noção de continuidade é definida em termos topológicos). Pode ser interessante, por exemplo, rever o conceito de continuidade para os funcionais. Outra possibilidade é alterar a topologia considerada – o uso das topologias fraca e fraca* é muito produtivo em alguns casos.

3.4 Semicontinuidade Inferior

Uma alternativa ao conceito de continuidade tradicional é o conceito de semicontinuidade inferior. Apesar de parecer feita sob medida para o método variacional direto, a noção de semicontinuidade inferior foi introduzida por Baire em um contexto puramente topológico.

Sejam X um espaço topológico de Hausdorff e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$, I é semicontínuo inferiormente se, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, o conjunto $A_\alpha = \{x \in X \mid I(x) > \alpha\}$ é aberto.

Uma condição que implica a semicontinuidade inferior é a condição de compacidade limitada: para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $K_\alpha = X \setminus A_\alpha$ é compacto (propriedade de Heine-Borel). Por outro lado, se I é semicontínuo inferiormente e X é compacto, I satisfaz a condição de compacidade limitada. Em particular, se X é compacto, as duas condições são equivalentes.

Ambas as condições podem também ser expressas em termos de seqüências: I é seqüencialmente semicontínuo inferiormente se, para toda seqüência $\{x_n\} \subset X$ convergente para x_0 , tem-se $I(x_0) \leq \liminf I(x_n)$; por sua vez, a condição seqüencial de compacidade limitada é: para cada K_α é seqüencialmente compacto.

É fácil verificar que todo funcional semicontínuo inferiormente é seqüencialmente semicontínuo inferiormente. A recíproca é verdadeira somente quando X satisfaz o primeiro axioma da enumerabilidade. Veja, por exemplo, de Figueiredo [5].

A relevância desses conceitos fica clara em vista do seguinte resultado:

3.2 - TEOREMA: *Sejam X um espaço topológico de Hausdorff e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição (seqüencial) de compacidade limitada. Então I é limitado inferiormente em X e assume o seu ínfimo.*

DEMONSTRAÇÃO: Sendo m o ínfimo de I sobre X , quer-se mostrar que $m > -\infty$ e que existe $u \in X$ tal que $I(u) = m$. Tome uma seqüência $\{\mu_n\} \subset \mathbb{R}$ estritamente decrescente convergindo para m . Pela condição de compacidade limitada, os conjuntos $K_n = K_{\mu_n}$ são todos compactos. Da definição de m , como $\mu_n > m$, tem-se que cada $K_n \neq \emptyset$. Além disso, $K_{n+1} \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a interseção de todos os conjuntos K_n é não-vazia, i.e., existe um ponto u tal que

$$u \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

Em particular, $I(u) \leq \mu_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $I(u) \leq m$. Mas m é o ínfimo de I sobre X , de forma que, de fato, $I(u) = m$ (automaticamente $m > -\infty$).

Para o caso em que I satisfaz a condição seqüencial de compacidade limitada, tome uma seqüência minimante $\{u_n\} \subset X$, ou seja, uma seqüência com $I(u_n) \rightarrow m$. Fixado qualquer $\mu > m$, tem-se que $\{u_n\}_{n \geq N_\mu} \subset K_\mu$ para algum N_μ suficientemente grande. Mas K_μ é seqüencialmente compacto, de modo que $\{u_n\}$ possui uma subseqüência convergente para algum $u \in X$. É fácil ver que u é o ponto de mínimo desejado. \square

Um caso extremamente útil em aplicações ocorre quando X é um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e I é coercivo e fracamente semicontínuo inferiormente. Em outras palavras:

3.3 - TEOREMA: *Sejam X é um subconjunto fracamente fechado de um espaço de Banach reflexivo e $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

- (i) $I(u) \rightarrow \infty$, quando $\|u\| \rightarrow \infty$ e $u \in X$;
- (ii) para qualquer seqüência $\{x_n\} \subset X$ fracamente convergente para x_0 tem-se $I(x_0) \leq \liminf I(x_n)$.

Então I é limitado inferiormente e assume o seu ínfimo em X .

Vale destacar que conjuntos fechados e convexos de espaços de Banach são fracamente fechados – este é o caso das bolas – e que a norma de um espaço de Banach é sempre coerciva e fracamente semicontínua inferiormente.

3.5 A Desigualdade de Poincaré

Retomando o objetivo de demonstrar a existência de solução fraca de (1.1) em $W_0^{1,2}(\Omega)$, busca-se alguma estimativa do crescimento da energia (1.2). Em outras palavras, deseja-se conhecer o comportamento de $I(u)$, dado por (1.2), quando $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$. Mais especificamente, quer-se aplicar o Teorema 3.3 à energia, o que só é possível se I for coercivo.

De fato, a coercividade de I é consequência do seguinte resultado (veja Gilbarg & Trudinger [7] para uma demonstração):

3.4 - TEOREMA (DESIGUALDADE DE POINCARÉ): *Para toda função $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left[\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_N} \right]^{\frac{1}{N}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde ω_N é o volume da bola unitária em \mathbb{R}^N .

O importante aqui é que se obtém uma estimativa de $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ em termos somente da norma L^2 do gradiente de u . Afinal de contas, o termo

$$\left[\frac{\text{Vol}(\Omega)}{\omega_N} \right]^{\frac{1}{N}}$$

não depende de u , mas somente de N (a dimensão do espaço) e do volume de $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Decorre imediatamente da desigualdade de Poincaré, que a norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ é equivalente à norma do gradiente definida em $W_0^{1,2}(\Omega)$ por

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Aplicando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade de Cauchy-Schwarz a (1.2), tem-se

$$I(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - uf \right) dx \geq \frac{1}{2} \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - \|u\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \geq A \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 - B \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

para constantes A e B positivas. Portanto, $I(u) \rightarrow \infty$ quando $\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow \infty$, ou seja, a energia é realmente um funcional coercivo.

3.6 A Solução Fraca do Problema de Dirichlet

Será provada agora a existência de uma solução fraca de (1.1), ou seja, uma solução de (2.1) em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Trata-se de uma aplicação direta do Teorema 3.3, com $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ e I sendo a energia dada por (1.2).

Uma vez que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, $W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega)$ e

$$(W_0^{1,2}(\Omega)^*)^* = W_0^{1,2}(\Omega)^* = W_0^{1,2}(\Omega),$$

de modo que $W_0^{1,2}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ de fato atende às hipóteses do Teorema 3.3.

A desigualdade de Poincaré (Teorema 3.4) garante a coercividade da energia I . Resta verificar a semicontinuidade inferior de I . Com efeito, para ver que I é fracamente seqüencialmente semicontínuo inferiormente, note que, da definição da energia (1.2),

$$I(u) = \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + L(u)$$

onde $\|\cdot\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$ é dada por (3.1) e $L : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional linear dado por

$$L(u) = - \int_{\Omega} u(x)f(x)dx.$$

Mas a norma do gradiente é fracamente seqüencialmente semicontínua inferiormente e, portanto, também o seu quadrado é fracamente seqüencialmente semicontínuo inferiormente. Por sua vez, da própria definição de convergência fraca, como L é um funcional linear, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ implica que $L(u_n) \rightarrow L(u)$, donde L é fracamente seqüencialmente semicontínuo inferiormente. Assim, I é fracamente seqüencialmente semicontínuo inferiormente.

Conseqüentemente, a aplicação do Teorema 3.3 assegura a existência de um ponto de mínimo absoluto $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ da energia. Ora, pela forma fraca do Princípio de Dirichlet (Teorema 3.1), u é solução de (2.1).

Surge, então, a questão da regularidade: será que esta solução u é de classe $C^2(\bar{\Omega})$ e, portanto, uma solução de (1.1)? Surpreendentemente, a resposta é afirmativa – e uma prova similar à encontrada em Smoller [11] é fornecida no Apêndice A.

Capítulo 4

O Teorema do Passo da Montanha

4.1 Métodos *Minimax*

Conforme foi visto anteriormente, a idéia central dos métodos variacionais é transformar o problema original em um problema de encontrar pontos críticos de um funcional definido em um espaço de funções adequado.

Na primeira parte deste livro, por exemplo, o Problema de Dirichlet (1.1) foi formulado em sua forma fraca (2.1); o funcional da energia (1.2) foi então definido no espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ e as técnicas da Análise Funcional foram utilizadas para demonstrar a existência de um ponto de mínimo absoluto da energia e, portanto, uma solução fraca do Problema de Dirichlet (1.1). Isso só foi possível porque a energia associada ao Problema de Dirichlet (1.1) é limitada inferiormente, coerciva e semicontínua inferiormente.

Entretanto, outros problemas envolvendo equações diferenciais são associados a funcionais de energia com diferentes características. Em muitos casos, o funcional é indefinido (não é limitado nem inferiormente, nem superiormente) e o método variacional direto não pode ser aplicado. Um exemplo clássico é o funcional $I : W_0^{1,2}([0, \pi]) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$I(u) = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 - \frac{1}{4} u^4 \right) dx$$

Fixado $u \in W_0^{1,2}([0, \pi])$ não-nulo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$I(\alpha u) = \alpha^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx - \alpha^4 \int_0^\pi \frac{1}{4} u^4 dx,$$

de modo que $I(\alpha u) \rightarrow -\infty$, quando $\alpha \rightarrow \infty$. Desta forma, I não é limitado inferiormente. Por outro lado, dado $n \in \mathbb{N}$,

$$I[\text{sen}(nx)] = n^2 \int_0^\pi \frac{1}{2} |\cos(nx)|^2 dx - \int_0^\pi \frac{1}{4} \text{sen}^4(nx) dx \geq \frac{\pi}{4} (n^2 - 1).$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, vê-se que $I[\text{sen}(nx)] \rightarrow \infty$ e I também não é limitado superiormente. Ainda assim, pontos críticos do funcional correspondem a soluções fracas do problema

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} = u^3, & \text{em } (0, \pi) \\ u(0) = 0 \text{ e } u(\pi) = 0 \end{cases}$$

e a solução trivial $u \equiv 0$ é um ponto crítico de I (que não é mínimo nem máximo). Não é fácil saber se I possui ou não algum outro ponto crítico.

É necessário, portanto, estabelecer condições que garantam a existência de pontos críticos mesmo para funcionais indefinidos. Claramente, o método variacional direto, desenvolvido no Capítulo 3 não é aplicável, mas pode-se utilizar os espaços de Sobolev como pano de fundo para outros métodos variacionais.

Os métodos conhecidos como *minimax* foram desenvolvidos justamente para provar a existência de pontos críticos que não um mínimo ou máximo absoluto. A essência de tais métodos é a obtenção de um valor crítico do tipo *minimax*; uma vez demonstrada a existência de tal valor, a existência de um ponto onde o valor crítico é efetivamente atingido (ou seja, de um ponto crítico) decorre de condições de “compacidade” do funcional em questão.

Neste capítulo, será demonstrado o Teorema do Passo da Montanha, que foi um marco na história dos métodos variacionais – trata-se da primeira vez que se provou a existência de um ponto crítico que não um mínimo absoluto. Em seu trabalho pioneiro na década de 1970 (Ambrosetti & Rabinowitz [3]), Ambrosetti e Rabinowitz utilizaram os resultados obtidos por Palais e Smale alguns anos antes para provar o Teorema do Passo da Montanha. Em especial, foram utilizados a condição de Palais-Smale (PS) e o Lema da Deformação.

4.2 A Geometria do Passo da Montanha

A idéia geométrica do Teorema do Passo da Montanha pode ser resumida assim: suponha que se deseja transpor uma cadeia montanhosa – como por exemplo a Serra do Curral em Belo Horizonte – com o mínimo de esforço possível. Ora, qualquer caminho saindo do sopé de um lado da montanha e indo até o sopé do lado oposto passará por um ponto cuja altitude será máxima (para aquele caminho). A idéia é procurar, dentre todos os caminhos possíveis, um cuja altitude máxima seja mínima (daí a expressão *minimax*). Intuitivamente, isso acontece justamente na região da montanha conhecida como passo.



FIGURA 8 - O passo da montanha na Serra do Curral.

Em termos matemáticos, fixados dois pontos P e $Q \in \mathbb{R}^2$, considere o conjunto

$$A = \{\alpha \in C^2([0, 1], \mathbb{R}^2) \mid \alpha(0) = P \text{ e } \alpha(1) = Q\}$$

dos caminhos suaves ligando P a Q . Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (aqui $f(x, y)$ seria a altitude correspondente ao ponto (x, y)), busca-se um caminho $\alpha \in A$ sobre o qual o valor máximo de f seja o menor possível.



FIGURA 9 - De todos os caminhos ligando P a Q , busca-se o que suba o mínimo possível.

Uma primeira iniciativa seria determinar a “altitude crítica” h_c , i.e., a menor altitude que um caminho precisa atingir para poder ligar P a Q (afinal de contas, é preciso transpor

a cadeia montanhosa que separa os dois pontos). Esse nível crítico seria dado por

$$h_c = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \max_{t \in [0,1]} [f \circ \alpha(t)] \right\} \quad (4.1)$$

Claramente, cada curva $\alpha \in A$ atinge um máximo (pois α é de classe C^2 e o intervalo $[0, 1]$ é um conjunto compacto). Entretanto, é possível que h_c não seja atingido sobre a classe de curvas A , motivo pelo qual não se pode substituir ínfimo por mínimo em (4.1).

Para ver como o ínfimo pode deixar de ser atingido, tome $P = (0, 1)$, $Q = (0, -1)$ e $f(x, y) = e^{-5y^2}(e^{-x} + 1)$. Para começar, note que $f(P) = f(Q) = 2e^{-5}$. Além disso, qualquer caminho ligando P a Q precisa cortar em algum ponto a reta $y = 0$, sobre a qual $f > 1$. Assim, por (4.1), $h_c \geq 1$. De fato, será mostrado que $h_c = 1$.

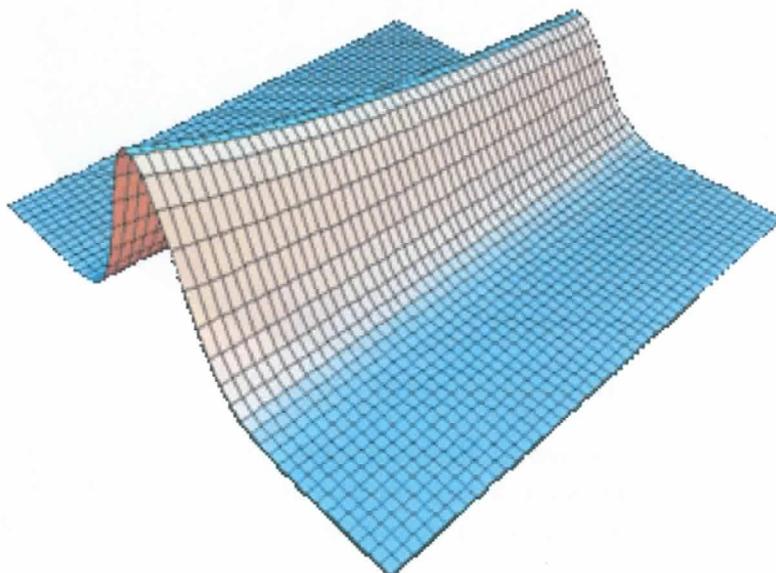


FIGURA 10 - O gráfico da função $e^{-5y^2}(e^{-x} + 1)$.

Considerando a família de curvas

$$\alpha_n(t) = (4n(t - t^2), 1 - 2t)$$

tem-se

$$f \circ \alpha_n(t) = e^{-20(t^2-t)-5} [e^{4n(t^2-t)} + 1] = e^{(4n-20)(t^2-t)-5} + e^{-20(t^2-t)-5}$$

e

$$\frac{d}{dt} f \circ \alpha_n(t) = [(4n - 20)e^{(4n-20)(t^2-t)-5} - 20e^{-20(t^2-t)-5}] (2t - 1),$$

de modo que

$$\max_{t \in [0,1]} [f \circ \alpha(t)] = f \circ \alpha_n \left(\frac{1}{2} \right) = e^{-n} + 1$$

Assim, realmente $h_c = 1$, de modo que nenhuma curva ligando P a Q tem máximo h_c .

No caso em que o mínimo em (4.1) é atingido, o passo da montanha corresponde exatamente ao ponto de máximo de uma curva $\alpha \in A$ que realiza a "altitude crítica" h_c .

Intuitivamente, este seria um ponto de sela, pois localmente este ponto é um máximo na direção de α e seria um mínimo na direção perpendicular a α . Assim, o passo da montanha tem que ser um ponto crítico de f (não necessariamente um ponto de sela, já que esse ponto pode também ser um ponto de máximo).

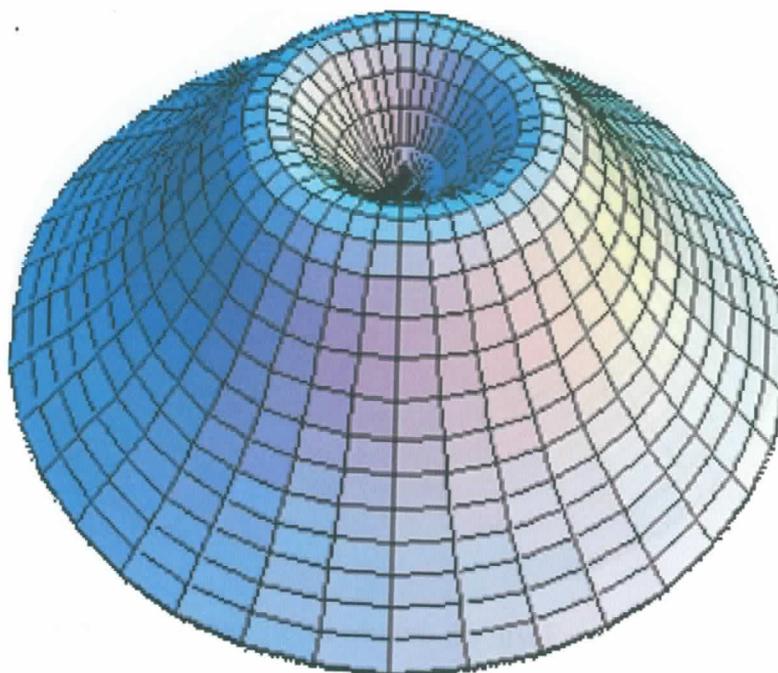


FIGURA 11 - O ponto crítico correspondente a h_c não precisa ser um ponto de sela.

Em vista do exposto acima, para garantir a existência de um ponto crítico de f , é necessário obter condições que garantam que o nível crítico h_c dado por (4.1) seja efetivamente atingido. Como o objetivo principal é obter a existência de um ponto crítico, é importante que essas condições não envolvam a existência de pontos críticos tais como pontos de máximo ou de mínimo.

Em primeiro lugar, precisa-se evitar que a “montanha” possa ser contornada. Uma condição para garantir isso, seria a existência de um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ dividindo o plano em duas componentes conexas disjuntas, uma contendo P e outra contendo Q , e tal que

$$\inf_{\Gamma} f > \max[f(P), f(Q)].$$

No exemplo anterior, Γ poderia ser a reta $y = 0$.

Entretanto, apenas esta condição não basta: é preciso evitar que o ponto crítico “escape” para o infinito. Uma tentativa natural seria pedir que Γ seja compacto, mas isso não é suficiente (o exemplo anterior poderia ser facilmente alterado para produzir um contra exemplo), visto que não há porque o nível crítico ser atingido sobre Γ .

Diversas condições sobre f podem resolver este problema. Por exemplo, condições de crescimento que garantam que f esteja bem acima do nível crítico h_c fora de uma bola. Analogamente, condições de decaimento que assegurem que f esteja bem abaixo do nível

crítico h_c fora de uma bola também garantem a existência de um ponto crítico. De fato, a seqüência dos pontos de máximo p_n de qualquer seqüência minimante de curvas α_n é tal que $f(p_n) \rightarrow h_c$; condições como as citadas acima garantem que $\{p_n\}$ é limitada, devendo portanto possuir uma subseqüência convergente para um ponto crítico.

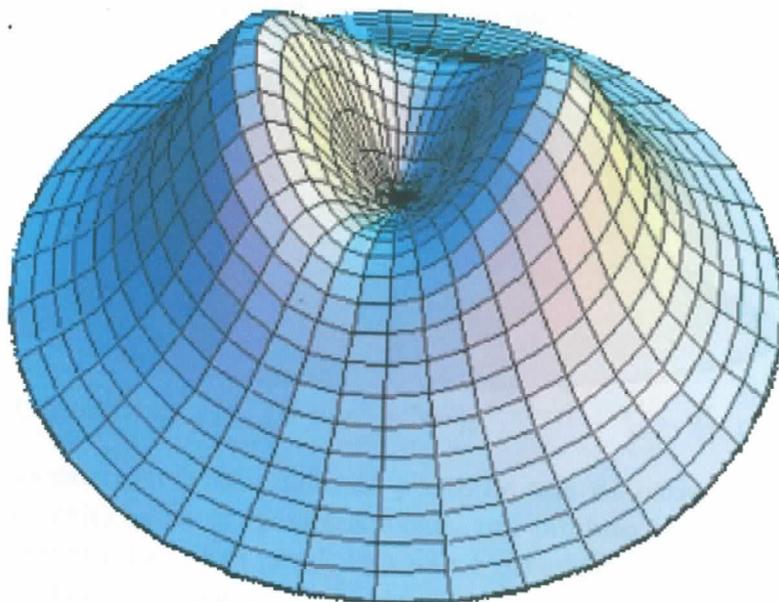


FIGURA 12 - Uma função que decai abaixo do nível crítico quando $|(x, y)| \rightarrow \infty$.

Por exemplo, considere a função

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}.$$

Sejam $P = (0, 0)$, $Q = (2, 2)$ e

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Tem-se que $f(P) = 0$ e $f(Q) = 16e^{-7} - 1 < 0$, enquanto

$$\inf_{\Gamma} f = \frac{7}{8}.$$

Assim, por (4.1), $h_c \geq \frac{7}{8}$; afinal de contas, qualquer caminho contínuo ligando P a Q (i.e., qualquer curva $\alpha \in A$) tem obrigatoriamente que interceptar Γ em pelo menos um ponto. Agora, seja $\{\alpha_n\} \subset A$ uma seqüência de curvas tal que

$$\max_{t \in [0, 1]} [f \circ \alpha_n(t)] \rightarrow h_c, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

(tal seqüência existe pela definição de ínfimo). Seja t_n o ponto de máximo de $f \circ \alpha_n$, $p_n = \alpha_n(t_n)$ é o ponto de máximo de f sobre α e $f(p_n) \rightarrow h_c$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas

$$\lim_{|(x, y)| \rightarrow \infty} f(x, y) = -\infty,$$

de modo que existe $R > 0$ tal que $f(x, y) < 0$ quando $|(x, y)| > R$. A seqüência $\{p_n\}$ está, portanto, contida em B_R (a bola de centro na origem e raio R). Ora, B_R é um conjunto compacto, de maneira que $\{p_n\}$ deve possuir uma subseqüência convergente. Assim, renomeando a seqüência se necessário, $p_n \rightarrow p$ quando $n \rightarrow \infty$ e $f(p) = h_c$. Pode-se verificar que p é um ponto crítico de f , de modo que h_c é um valor crítico de f .

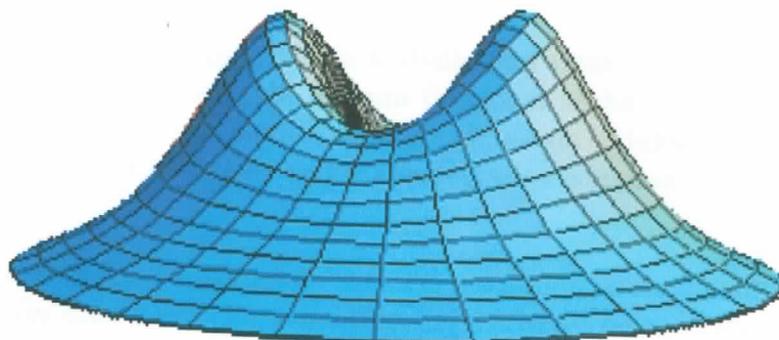


FIGURA 13 - O gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2} - \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8}$, por outro ângulo.

Note que, no exemplo acima, além do ponto de sela no passo da montanha, existem ainda outros pontos críticos (dois máximos locais, um mínimo local e outro ponto de sela no outro passo da montanha). Em geral, isso não é necessário em um espaço de dimensão infinita, onde a bola não é compacta.

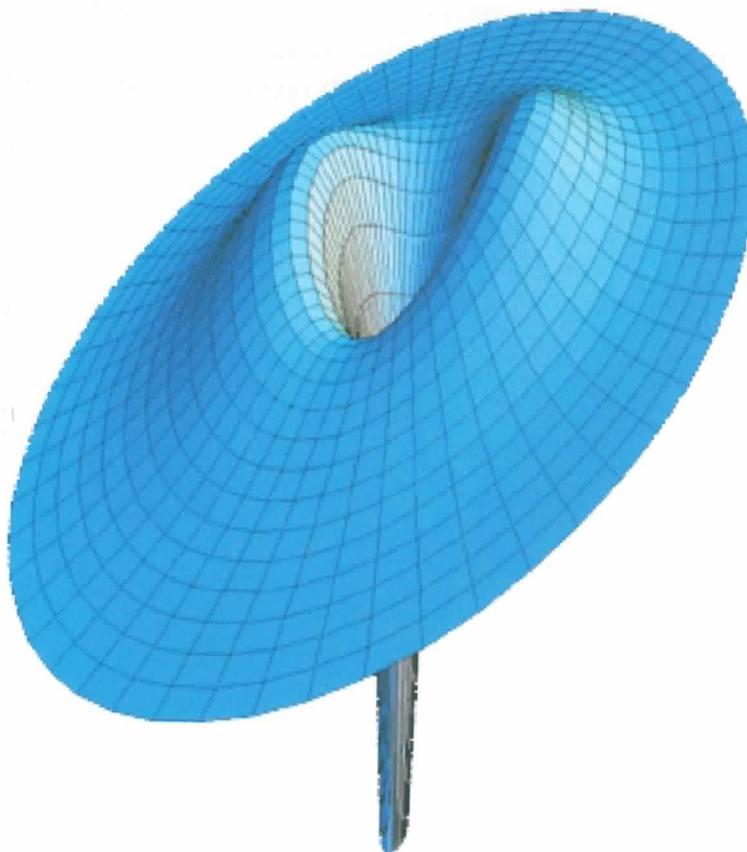


FIGURA 14 - A verdadeira geometria do passo da montanha.

4.3 A Condição de Palais-Smale

Como foi visto no Capítulo 3, as bolas não são compactas em espaços de dimensão infinita. Assim, para utilizar as idéias da seção anterior, é preciso obter alguma condição que resolva o problema da falta de compactidade.

Na década de 1960, Palais e Smale trabalharam nesse problema e chegaram a uma condição que, de certa forma, garante que um funcional tenha alguma “compactidade”. Os resultados de Palais e Smale são de fato bem gerais, sendo válidos para espaços de Banach reais. Por motivos heurísticos, eles serão apresentados somente para espaços de Hilbert (como em Evans [6]).

Sendo H um espaço de Hilbert, $C^1(H, \mathbb{R})$ é definido como o conjunto dos funcionais $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ que são diferenciáveis no sentido de Fréchet e cujas derivadas de Fréchet são contínuas em H . Diz-se que um funcional $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer seqüência $\{u_n\} \subset H$, tal que $\{I(u_n)\}$ é limitada e $I'(u_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, possui uma subseqüência convergente.

Note que, se um funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS), o conjunto K_c dos pontos críticos de I correspondentes ao valor crítico c é compacto para todo $c \in \mathbb{R}$.

A condição de Palais-Smale (PS) é muito conveniente para a aplicação dos métodos variacionais, como será visto mais adiante. Diversas variantes foram desenvolvidas ao longo dos anos, com destaque para a condição de Cerami [4].

4.4 O Lema da Deformação

Os primeiros resultados de deformação surgiram a partir de 1965, com um artigo de Browder. A idéia de deformação vem do fato de que um conjunto de nível correspondente a um valor regular pode ser deformado continuamente em conjuntos de nível próximos.

Para funções suaves em \mathbb{R}^2 , por exemplo, a deformação pode ser feita seguindo o fluxo do campo gradiente (para tempos positivos ou negativos).

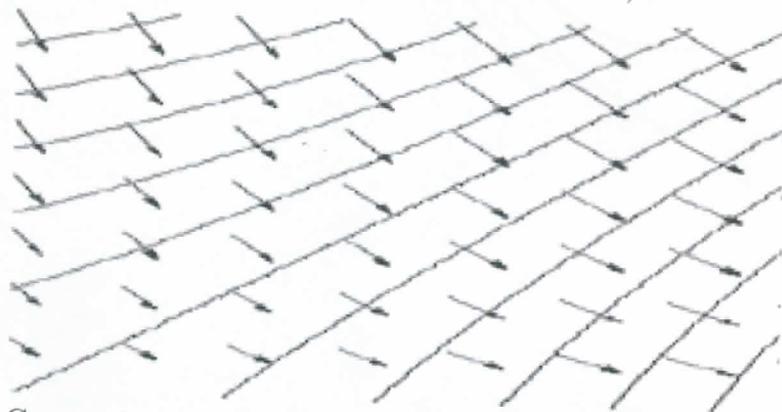


FIGURA 15 - Curvas de nível regulares podem ser deformadas seguindo o gradiente.

Entretanto, uma curva de nível correspondente a um nível crítico nem sempre pode ser deformada continuamente em curvas vizinhas. Isso acontece porque a geometria das curvas de nível pode alterar-se radicalmente em um nível crítico. Por exemplo, círculos podem degenerar-se em um ponto ao se aproximarem de pontos de mínimo ou de máximo.

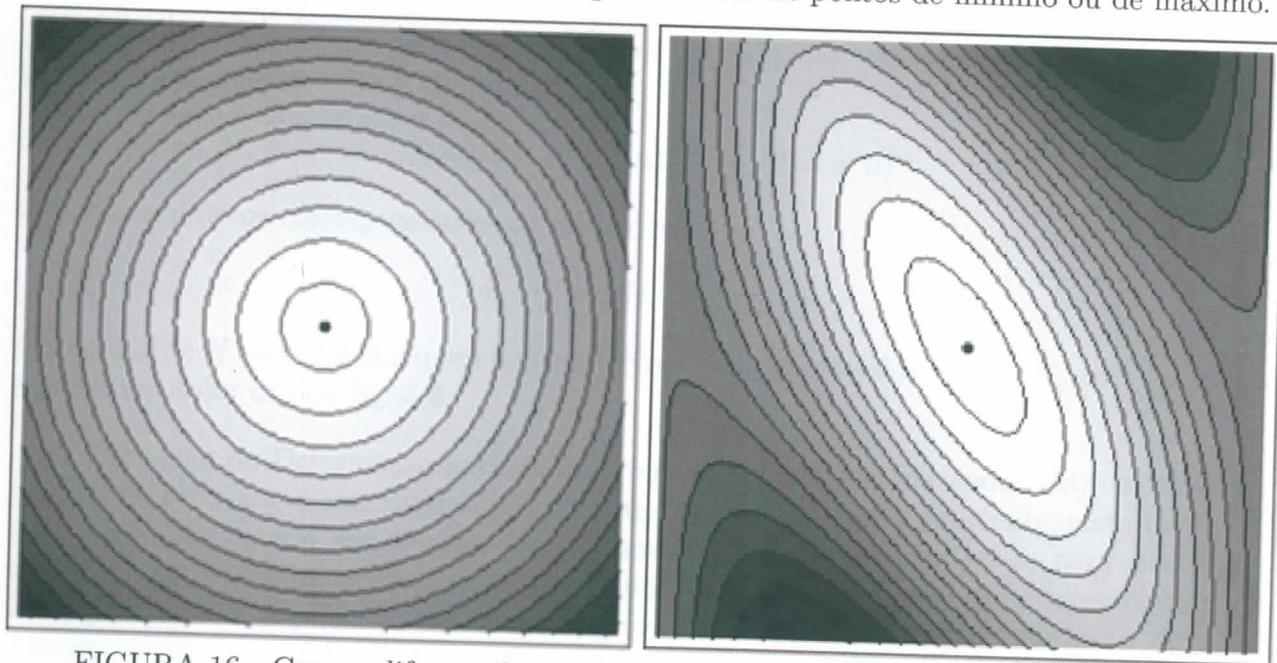


FIGURA 16 - Curvas difeomorfas a círculos degeneram-se em pontos de máximo.

Nos níveis críticos onde ocorrem pontos de sela, a mudança de geometria costuma ser ainda mais dramática: curvas de nível difeomorfas a círculos podem colapsar em uma figura-8, hipérbolas podem transformar-se em pares de retas concorrentes, etc.

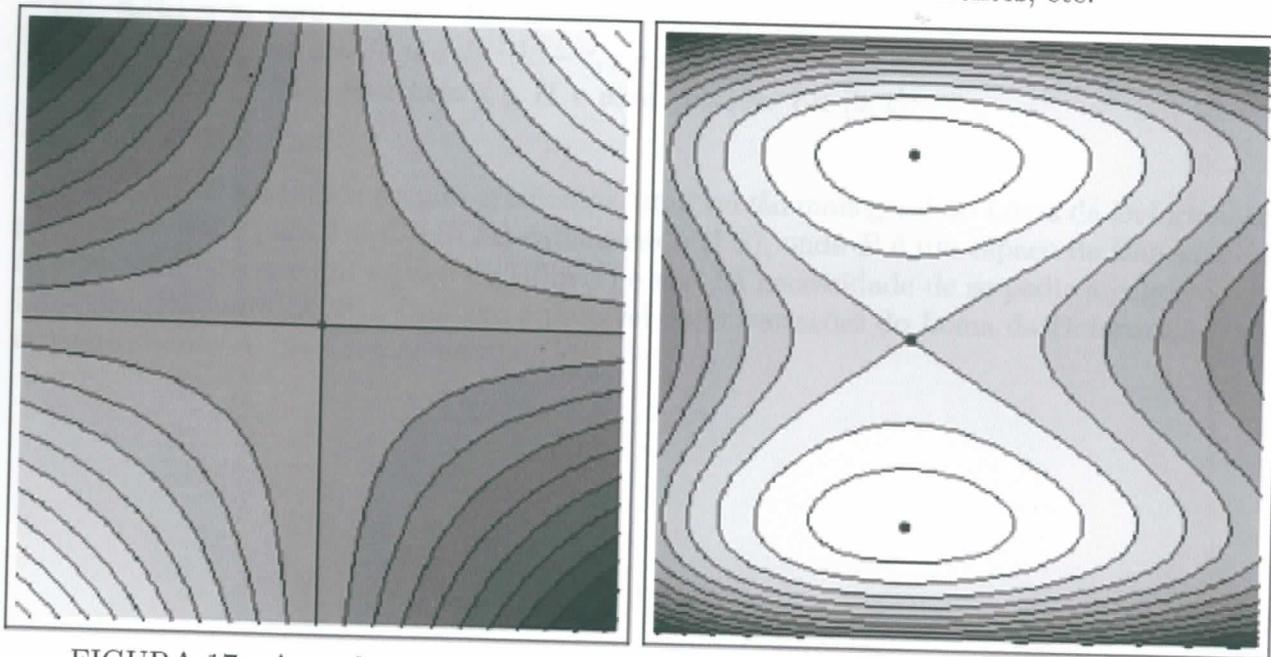


FIGURA 17 - A mudança na geometria das curvas de nível em um ponto de sela.

Em espaços de dimensão infinita, porém, a situação é mais delicada, pois os conjuntos de nível podem ter uma topologia bastante bizarra. Além disso, pode não haver um campo gradiente e trabalhar com campos vetoriais pode gerar transtornos.

Para lidar com tais problemas, ao invés de trabalhar com conjuntos de nível, é mais apropriado trabalhar com os conjuntos

$$K_c = \{u \in H \mid I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}$$

dos pontos críticos correspondentes ao nível c e

$$A_c = \{u \in H \mid I(u) \leq c\}$$

dos pontos de H onde I não supera o nível c . Note que em um valor regular $K_c = \emptyset$, enquanto que em um valor crítico $K_c \neq \emptyset$.

O Lema da Deformação garante que, para funcionais satisfazendo (PS), assim como ocorre em \mathbb{R}^N , se c é um valor regular de um funcional, para ε suficientemente pequeno, o conjunto $A_{c+\varepsilon}$ pode ser deformado continuamente, através do nível c , para dentro do conjunto $A_{c-\varepsilon}$. Assim, conjuntos de nível suficientemente próximos do conjunto de nível correspondente a c podem ser deformados continuamente através do conjunto de nível correspondente a c até ficarem completamente abaixo do nível c .

Quando c é um valor crítico, da mesma forma que em \mathbb{R}^N , a mudança na geometria dos conjuntos de nível pode impedir que a deformação possa ser feita continuamente.

4.1 - LEMA DA DEFORMAÇÃO: Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz (PS), I' é Lipschitz em subconjuntos limitados de H e $K_c = \emptyset$, então dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $0 < \delta < \varepsilon$ e uma deformação contínua $\eta : [0, 1] \times H \rightarrow H$ tal que:

- (i) $\eta_0(u) = u$, para todo $u \in H$;
- (ii) $\eta_1(u) = u$, para todo $u \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$;
- (iii) $I[\eta_t(u)] \leq I(u)$, para todo $u \in H$ e para qualquer $t \in [0, 1]$;
- (iv) $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

Utilizando campos pseudo-gradientes, uma versão mais geral do Lema da Deformação pode ser provada para $I \in C^1(B, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS), onde B é um espaço de Banach real (não necessariamente um espaço de Hilbert) e não há necessidade de se pedir a condição de Lipschitz (Rabinowitz [9]). Também é possível obter variações do Lema da Deformação que utilizam condições mais fracas do que (PS).

4.5 A Prova do Teorema do Passo da Montanha

Utilizando a idéia geométrica de *minimax* discutida na Seção 4.2. e o Lema da Deformação pode-se demonstrar o famoso Teorema do Passo da Montanha, de Ambrosetti e Rabinowitz [3].

4.2 - TEOREMA DO PASSO DA MONTANHA: Se $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ satisfaz (PS), I' é Lipschitz em subconjuntos limitados de H e, além disso, I é tal que:

- (i) $I(0) = 0$;
- (ii) existem m e r positivos tais que $I(u) \geq m$, quando $\|u\| = r$;
- (iii) existe $v \in H$ tal que $I(v) \leq 0$ e $\|v\| > r$.

Então I possui um valor crítico

$$c = \inf_{\alpha \in A} \left\{ \max_{t \in [0,1]} I[\alpha(t)] \right\}$$

onde

$$A = \{ \alpha \in C([0, 1], H) \mid \alpha(0) = 0 \text{ e } \alpha(1) = v \}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que c não é um valor crítico de I , ou seja $K_c = \emptyset$. Escolha ε suficientemente pequeno para usar o Lema da Deformação e tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{m}{2}$$

Pelo Lema da Deformação, existem $0 < \delta < \varepsilon$ e um homeomorfismo $\eta_1 : H \rightarrow H$ tal que $\eta_1(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$ e $\eta_1(u) = u$, para todo $u \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

Pela definição de c , pode-se tomar $\alpha \in A$ tal que

$$\max_{t \in [0,1]} I[\alpha(t)] \leq c + \delta.$$

Seja $\tilde{\alpha} = \eta_1 \circ \alpha$, como $\alpha(t) \in A_{c+\delta}$ para todo $t \in [0, 1]$, $\tilde{\alpha}(t) \in A_{c-\delta}$ para todo $t \in [0, 1]$. Ora, claramente, $c \geq m$, de modo que $0 \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ e

$$\tilde{\alpha}(0) = \eta_1[\alpha(0)] = \eta_1(0) = 0;$$

de modo análogo, $v \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$ e

$$\tilde{\alpha}(1) = \eta_1[\alpha(1)] = \eta_1(v) = v.$$

Assim, $\tilde{\alpha} \in A$ o que é uma contradição, visto que

$$\max_{t \in [0,1]} I[\tilde{\alpha}(t)] \leq c - \delta.$$

Logo, c é um valor crítico de I . \square

Epílogo

Diversos métodos variacionais têm sido desenvolvidos e aplicados nos últimos 30 anos, desde o surgimento do Teorema do Passo da Montanha (Ambrosetti & Rabinowitz [3]). Descobriu-se, por exemplo, que outras configurações geométricas também podem levar a situações similares à do Teorema 4.2. Dentre essas configurações, destacam-se as que resultam nos teoremas de ponto de sela e de *linking*.

Essencialmente, a idéia de *linking* entre dois conjuntos disjuntos A e B está relacionada com a questão de ser ou não possível contrair continuamente o conjunto A a um ponto sem interceptar B . Quando não é possível fazer tal deformação, diz-se que A está em *linking* com B . Se o espaço ambiente tiver dimensão finita, A está em *linking* com B se, e somente se, B está em *linking* com A . Curiosamente, em espaços de dimensão infinita, esta relação não é necessariamente simétrica.

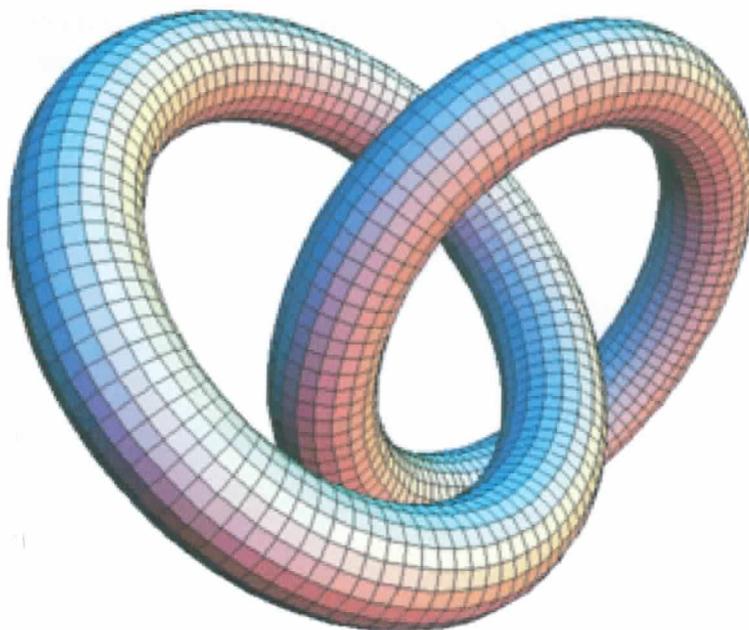


FIGURA 18 - Dois conjuntos em *linking*.

Seja X é um espaço de Banach, considere o conjunto Φ de todas as aplicações $\phi \in C([0, 1] \times X, X)$ tais que:

- (i) para todo $t \in [0, 1)$, $\phi_t : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo sobrejetor e ϕ_t^{-1} é contínuo;
- (ii) $\phi_0(u) = u, \forall u \in X$;
- (iii) existe $u_0 \in X$ tal que $\phi_1(u) = u_0$ para todo $u \in X$;
- (iv) $\phi_t(u) \rightarrow u_0$ quando $t \rightarrow 1$ uniformemente em conjuntos limitados de X .

A grosso modo, Φ é o conjunto das contrações contínuas “razoáveis” de X a um ponto.

Pode-se assim definir o conceito de *linking* com mais rigor: um conjunto A está em *linking* com um conjunto B , se:

- (i) $A \cap B \neq \emptyset$;
- (ii) para qualquer $\epsilon \in \Phi$, existe t_0 tal que $\phi_{t_0}(A) \cap B \neq \emptyset$.

Seja $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional, uma situação que pode levar à existência de um ponto de sela para I ocorre quando A está em *linking* com B e

$$\sup_{u \in A} I(u) \leq \inf_{u \in B} I(u).$$

Neste caso, pode-se produzir um candidato a valor crítico do tipo *minimax*, dado por

$$c = \inf_{\phi \in \Phi} \left\{ \max_{\substack{t \in [0,1] \\ u \in A}} I[\phi_t(u)] \right\}$$

Sob hipóteses bastante razoáveis pode ser provada a existência de um ponto crítico correspondente ao nível c definido acima.

Algumas excelentes referências disponíveis são Mawhin & Willem [8], Rabinowitz [9], Schechter [10] e Struwe [12].

Apêndice A

Regularidade das Soluções Fracas Obtidas

Teoremas de regularidade para equações elípticas podem ser usados para mostrar que as soluções fracas obtidas nos Capítulos 3 e 4 são de fato soluções clássicas, desde que o termo não linear seja localmente lipschitziano.

Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado, com bordo suave $\partial\Omega$, $N \geq 3$ e $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente lipschitziana com crescimento subcrítico, i.e.,

$$|f(x, t)| \leq a|t|^\sigma + b, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \bar{\Omega} \quad (\text{A.2})$$

sendo $a, b > 0$, $0 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$. Para ser breve, os casos em que $N = 1, 2$ e $b = b(x)$ não serão tratados aqui.

Necessita-se das imersões de Sobolev a seguir (Adams [1], Th.5.4, Th.6.2); na mesma referência são encontradas as definições dos espaços de Hölder, $C^\lambda(\Omega)$.

A.1 - TEOREMA: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com bordo suave, $1 \leq p < \infty$.*

Então, as seguintes imersões são contínuas:

- (i) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-kp}$, $kp < N$ (se $kp = N$, podemos tomar $1 \leq q < \infty$); Além disso, essa imersão é compacta quando $q < \frac{Np}{N-kp}$.
- (ii) $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^\lambda(\bar{\Omega})$ para algum $0 < \lambda < 1$, quando $kp > N$.

Será também utilizada a seguinte propriedade do operador de Nemytskii \mathcal{N}_f associado a f (e.g. de Figueiredo [5], Th.2.3):

A.2 - TEOREMA: *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, e f uma função de Carathéodory definida em $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$. Suponha que existam $c > 0$, $b(x) \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$ e $r > 0$ tais que*

$$|f(x, t)| \leq c|s|^r + b(x).$$

Então a aplicação $\mathcal{N}_f : L^{qr}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$, onde $\mathcal{N}_f(u)(x) = f(x, u(x))$, é contínua.

Serão utilizados ainda os seguintes resultados de regularidade:

A.3 - TEOREMA: (Agmon [2], Th.8.2) *Suponha que $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ e que $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ seja uma solução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = h(x), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Então $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

A.4 - TEOREMA: (Gilbarg & Trudinger [7], Th.6.14) *Seja $0 < \alpha \leq 1$ e suponha que $u \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ seja uma solução fraca de (A.3) com $h \in C^\alpha(\bar{\Omega})$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$.*

A seguir, os resultados acima serão usados em um argumento iterativo conhecido como *bootstrapping* para demonstrar o

A.5 - TEOREMA: *Seja $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ uma solução fraca de (A.1). Então u é uma solução clássica de (A.1), i.e., $u \in C^2(\bar{\Omega})$.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema A.1(i), $u \in L^p(\Omega)$, onde $p = \frac{2N}{N-2}$. Defina

$$h(x) = f(x, u(x)).$$

Pelo Teorema A.2, $h \in L^s(\Omega)$, onde $s = \frac{p}{\sigma}$. A seguir, será mostrado que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, para algum r tal que $2r > N$.

Se $2s > N$, basta tomar $r = s$. De fato, u é solução fraca do problema linear elíptico não-homogêneo (A.3). Logo, aplicando o Teorema A.3, temos que $u \in W^{2,r}(\Omega)$.

Suponha agora que $2s < N$. Uma vez que $0 < \sigma < \frac{N+2}{N-2}$, existe um único $\epsilon > 0$ tal que

$$s = (1 + \epsilon) \frac{2N}{N+2}.$$

Como no caso anterior, será usado o Teorema A.3 para concluir que $u \in W^{2,s}(\Omega)$. Utilizando o Teorema A.1(i), temos que $u \in L^{p_1}(\Omega)$, sendo $p_1 = \frac{Ns}{N-2s}$. Portanto, $h(x) \in L^{s_1}(\Omega)$ para $s_1 = \frac{p_1}{\sigma}$ e então, pelo Teorema A.3, $u \in W^{2,s_1}(\Omega)$. Para vermos que u tem regularidade maior, basta observarmos que

$$\frac{s_1}{s} = \frac{p_1}{p} = \frac{Ns}{(N-2s)} \frac{(N-2)}{2N} = \frac{(1+\epsilon)(N-2)}{N-2-4\epsilon} > 1 + \epsilon.$$

Podemos repetir este último argumento (conhecido como *bootstrapping*) um número finito de vezes para mostrar que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, para algum $2r \geq N$.

Para o caso $2s = N$, como $h \in L^s(\Omega)$, segue que $h \in L^q(\Omega)$ para algum $q < s$ tal que $(1 + \epsilon)q > s$. Aplica-se o argumento *bootstrapping* mais uma vez para concluir que $u \in W^{2,r}(\Omega)$, com $2r > N$.

Portanto, pode-se aplicar o Teorema A.1(ii) para mostrar que $u \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, com $0 < \lambda < 1$. Assim, $h(x) = f(x, u(x))$ é de classe $C^\lambda(\bar{\Omega})$. Aplicamos, então o Teorema A.4 para concluir que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Logo, u é uma solução clássica do problema (A.1). \square

Apêndice B

Código *Mathematica*[®] dos Gráficos

A maioria dos gráficos deste livro foram gerados utilizando o software *Mathematica*[®], da Wolfram Research (<http://www.wolfram.com>). Abaixo, seguem os códigos utilizados:

Figura 3:

```
ParametricPlot3D[{{Cos[u]*Cos[v],Sin[u]*Cos[v],Sin[v]},  
{u/15,1/2-u/15,Sqrt[1-(u/15)^2-(1/2-u/15)^2]+(v-Pi/4)/80}},  
{u,0,2*Pi},{v,Pi/4,Pi/2},ViewPoint->{1,1,1},  
PlotPoints->{41,9},Axes->False,Boxed->False]
```

Figura 4:

```
Plot[Exp[x],{x,-3,2}]
```

Figura 5:

```
Plot[{ArcTan[1/x]/ArcTan[1],ArcTan[2/x]/ArcTan[2],ArcTan[5/x]/ArcTan[5],  
ArcTan[10/x]/ArcTan[10],ArcTan[20/x]/ArcTan[20],ArcTan[50/x]/ArcTan[50],  
ArcTan[100/x]/ArcTan[100],ArcTan[200/x]/ArcTan[200],ArcTan[500/x]/ArcTan[500],  
ArcTan[1000/x]/ArcTan[1000],Sign[x]},  
{x,-1,1},  
PlotPoints->50,PlotStyle->{{AbsoluteThickness[2],RGBColor[0,0,0]},  
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,0.4]}, {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,1]},  
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0.4,0.6]}, {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,1,0]},  
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[0.2, 1, 0]}, {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0.8,1,0]},  
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[1,1,0]}, {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0.6,0,0]},  
{AbsoluteThickness[1],RGBColor[1,0,0]}, {AbsoluteThickness[1],RGBColor[0,0,0]}}
```

Figura 6:

```
Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2},ViewPoint->{1,0.8,0.1},  
PlotPoints->25,PlotRange->{0,1},Mesh->True,Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 7:

```
ParametricPlot3D[{r*Cos[v],r*Sin[v],Exp[r^2]+r*Sin[v]+Cos[2*r*Cos[v]]},  
{r,0,1},{v,0,2*Pi},ViewPoint->{-1,-1,0},  
PlotPoints->{20,40},PlotRange->{0,5},Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 9:

```
Plot3D[(1/2+Exp[-y^2]+Sin[x*y]*Cos[2/(x^2+1)-3*x+1]/2)/(1+y^4)+Sin[x]*Sin[y]/3,
{x,-5,5},{y,-3,3},ViewPoint->{0,1,0.8},
PlotPoints->50,PlotRange->{-0.4,3.2},Mesh->True,Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 10:

```
Plot3D[Exp[-5y^2](Exp[-x]+1),{x,0,2},{y,-2,2},ViewPoint->{-1,-1,1},
PlotPoints->50,PlotRange->{0,2},Mesh->True,Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 11:

```
ParametricPlot3D[{r*Cos[v],r*Sin[v],r^2*Exp[1-r^2]-r^2/8},
{r,0,3},{v,0,2*Pi},ViewPoint->{1,0,1},
PlotPoints->{20,40},PlotRange->{-2,4},Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 12:

```
ParametricPlot3D[{2*r*Cos[v],2*r*Sin[v],Exp[1-r^2]((r*Cos[v])^2+3*(r*Sin[v])^2)-r^2/8},
{r,0,3},{v,0,2*Pi},ViewPoint->{1,0.2,1},
PlotPoints->{20,40},PlotRange->{-1,3},Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 13:

```
ParametricPlot3D[{2*r*Cos[v],2*r*Sin[v],Exp[1-r^2]((r*Cos[v])^2+3*(r*Sin[v])^2)-r^2/8},
{r,0,3},{v,0,2*Pi},ViewPoint->{1,0.2,0},
PlotPoints->{20,40},PlotRange->{-1,3},Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 14:

```
ParametricPlot3D[
{2*r*Cos[v],2*r*Sin[v],Exp[1-r^2]((r*Cos[v])^2+3*(r*Sin[v])^2)-3*r*Cos[v]-1/r},
{r,0.1,3},{v,0,2*Pi},ViewPoint->{1,0.4,-0.5},
PlotPoints->{20,60},PlotRange->{-12,9},Axes->False,Boxed->False];
```

Figura 15:

```
<< Graphics`PlotField`;
Fundo=ContourPlot[((x+2)^2-(y+2)^2),{x,-1,1},{y,-1,1},
PlotPoints->{101,101},Contours->11,ContourShading->False,Frame->False];
Campo=PlotGradientField[((x+2)^2-(y+2)^2),{x,-1,1},{y,-1,1},PlotPoints->8];
Show[Fundo,Campo];
```

Figura 16a:

```
ContourPlot[-Sqrt[x^2+y^2]^1.5,{x,-1,1},{y,-1,1},
PlotPoints->{101,101},Contours->17,FrameTicks->False];
```

Figura 16b:

```
ContourPlot[Sin[x]*Sin[x+y],{x,0,Pi},{y,-Pi/2,Pi/2},
PlotPoints->{101,101},Contours->17,FrameTicks->False];
```

Figura 17a:

```
ContourPlot[x*y,{x,-1,1},{y,-1,1},  
PlotPoints→{101,101},Contours→21,FrameTicks→False];
```

Figura 17b:

```
ContourPlot[-3*x+x^3+2*y^2-y^4,{x,-1.7,0},{y,-1.65,1.65},  
PlotPoints→{101,101},Contours→13,FrameTicks→False];
```

Figura 18:

```
ParametricPlot3D[{  
{5+Cos[u]*(Cos[2*v]+5),Sin[u]*(Cos[2*v]+5)*Cos[2*Pi/3]-Sin[2*v]*Sin[2*Pi/3],  
Sin[u]*(Cos[2*v]+5)*Sin[2*Pi/3]+Sin[2*v]*Cos[2*Pi/3]},  
{Cos[u]*(Cos[2*v]+5),Sin[u]*(Cos[2*v]+5)*Cos[Pi/3]-Sin[2*v]*Sin[Pi/3],  
Sin[u]*(Cos[2*v]+5)*Sin[Pi/3]+Sin[2*v]*Cos[Pi/3]}},  
{u,0,2*Pi},{v,-Pi/2,Pi/2},ViewPoint→{1,1,0},  
PlotPoints→{100,20},PlotRange→{-12,9},Axes→False,Boxed→False];
```

Bibliografia

1. **Adams, R.A.:** *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. **Agmon, S.:** *The L^p Approach to the Dirichlet Problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), pp. 405-448.
3. **Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P.H.:** *Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications*, J. Func. Anal. 14 (1973), pp. 349-381.
4. **Cerami, G.:** *Un Criterio di Esistenza per i Punti Critici su Varietà Illimitate*, Rc. Ist. Lomb. Sci. Lett. 112 (1978), pp. 332-336.
5. **de Figueiredo, D.G.:** *Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute Lectures on Mathematics, Springer-Verlag, 1989.
6. **Evans, L.C.:** *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, 1998.
7. **Gilbarg, D. & Trudinger, N.S.:** *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, Springer-Verlag, 1983.
8. **Mawhin, J. & Willem, M.:** *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Applied Mathematical Sciences 74, Springer-Verlag, 1989.
9. **Rabinowitz, P.H.:** *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS, Regional Conference Series in Mathematics 65, American Mathematical Society, 1986.
10. **Schechter, M.:** *Linking Methods in Critical Point Theory*, Birkhäuser, 1999.
11. **J. Smoller:** *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1983.
12. **Struwe, M.:** *Variational Methods – Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, 2nd edition, Ergebnisse der Mathematik un ihrer Grenzgebiete 3. Folge 34, Springer-Verlag, 1996.
13. **Taylor, M.E.:** *Partial Differential Equations I – Basic Theory*, Applied Mathematical Sciences 115, Springer-Verlag, 1997.